L3 Math : Algèbre et Géométrie Feuille n° 7

I. (a) Pour les sous-espaces $W \subset \mathbb{R}^3$ suivants, qu'est-ce qu'est $W^\perp \subset \mathbb{R}^{3*}$?

$$W = \langle \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right) \rangle, \qquad W = \langle \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) \rangle, \qquad W = \{\mathbf{0}\}, \qquad W = \mathbb{R}^3.$$

(b) Pour les sous-espaces $H \subset \mathbb{R}^{3*}$ suivants, donner une base de $H^\perp \subset \mathbb{R}^3$.

$$H = \langle X_1 + X_2 + X_3, X_1 - X_2 \rangle, \qquad H = \{0\},$$
$$H = \langle X_1 - X_2 + X_3 \rangle, \qquad H = \mathbb{R}^{3*}.$$

II. Pour chacune des formes bilinéaires symétriques suivantes $B_i : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \times \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}$, répondre aux questions suivantes.

$$B_1(f,g) = \int_0^1 f'(x)g'(x)\,dx,$$
$$B_2(f,g) = -f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x)\,dx,$$
$$B_3(f,g) = \int_0^1 \Big(f(x)g(x) + f'(x)g'(x)\Big)\,dx,$$
$$B_4(f,g) = \int_0^1 \Big(f(x)g'(x) + f'(x)g(x)\Big)\,dx.$$

(a) Déterminer la matrice de B_i par rapport à la base 1, x, x^2, x^3 de $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

(b) Déterminer le rang de B_i. Déterminer si B_i est non dégénérée ou dégénérée.

(c) Déterminer le noyau de B_i.

(d) Déterminer les $f(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ qui sont **isotropes** par rapport à B_i (c'est-à-dire vérifiant $B_i(f,f) = 0$).

III. On considère $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel **réel**. Pour chacune des formes bilinéaires **réelles** suivantes $B_i : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, répondre aux questions suivantes.

$$B_5(z,w) = \mathfrak{Re}(zw), \qquad B_6(z,w) = \mathfrak{Im}(zw),$$
$$B_7(z,w) = \mathfrak{Re}(\overline{z}w), \qquad B_8(z,w) = \mathfrak{Im}(\overline{z}w),$$

(a) Déterminer la matrice de B_i par rapport à la base 1, i, de l'espace vectoriel réel $\mathbb{C}$.

(b) Déterminer si B_i est symétrique ou anti-symétrique ou autre.
Pour chaque B_i donner **deux arguments** justifiant votre réponse : un qui utilise la matrice du (a), et un qui utilise les propriétés de $\mathfrak{Re}$ et $\mathfrak{Im}$.

(c) Déterminer le rang de B_i. Déterminer si B_i est non dégénérée ou dégénérée.

(d) Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ qui sont isotropes par rapport à B_i.

IV. Répondre aux questions pour chacune des formes quadratiques Q suivantes sur $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
&X^2+Y^2+Z^2\\
&X^2-XY+Y^2-YZ+Z^2,\\
&X^2+2XY+2XZ+Y^2+2YZ+Z^2,\\
&XY+XZ+YZ.
\end{aligned}$$

(a) Quelle est la matrice de Q par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$?

(b) Quel est le rang de Q ?
La forme quadratique Q est-elle dégénérée ou non dégénérée ?

(c) Ecrire Q sous la forme $Q = a_1L_1^2 + a_2L_2^2 + a_3L_3^2$ avec les $a_i \in \mathbb{Q}$ et L_1, L_2, L_3 des formes linéaires indépendantes.
Quelle est la signature de Q ?

(d) Q est-elle définie positive, positive mais dégénérée, définie négative, négative mais dégénérée, ou indéfinie ?

(e) Q est-elle isotrope ou anisotrope (c'est à dire, existe-t-il $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ dans $\mathbb{R}^3$ avec $Q(a,b,c) = 0$) ?

V. Pour chaque forme bilinéaire des exercices II et III, considérons les formes quadratiques $Q_i(f) = B_i(f,f)$ ou $Q_i(z) = B_i(z,z)$.

(a) Quelles sont les signatures des Q_i ?

(b) Quelles Q_i sont définies positives, positives mais dégénérées, définies négatives, négatives mais dégénérées, ou indéfinies ?

(c) Quelles Q_i sont isotropes, et quelles sont anisotropes ?