Variables aléatoires

1. On considère la répétition de N épreuves de Bernoulli ou loi binomiale. Soit p la probabilité d'un évènement A et $q = 1 - p$ la probabilité du contraire de A ($p = P(A)$, $q = P(\overline{A})$). Le résultat de la variable aléatoire X est le nombre de fois que l'on obtient l'évènement A au cours de N tirages. Les valeurs prises par X sont donc 0, 1, 2 .... N. On montre que :

$$P(X = k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k q^{N-k}$$

a) Vérifier que l'on a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} P(X = k) = 1$. On utilisera la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = (p+q)^N \tag{1}$$

b) Calculer l'espérance mathématique (ou moyenne) de la variable aléatoire X et montrer que $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} k\ P(X = k) = Np$.
Indication : on dérivera l'équation (1) en p.
c) Montrer que $V(X) = Npq$.
Indication : on dérivera encore une fois l'équation (1) en p.

2. Soit X et Y deux variables aléatoires prenant les valeurs discrètes $(x_i)_{i=1,n}$ et $(y_j)_{j=1,m}$. On pose :

$$Cov(X,Y) = E\Big(\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\Big) = \sum_{i,j} \big(x_i - E(X)\big)\big(y_j - E(Y)\big) P(X = x_i \text{ et } Y = y_j)$$

Montrer que si les deux variables X et Y sont indépendantes alors $Cov(X,Y) = 0$.

3. Trois chasseurs tirent simultanément sur 3 canards. On suppose que chaque chasseur, indépendamment des autres, choisit un canard au hasard et le tue. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de canards tués. Donner la loi de X et calculer $E(X)$.
Résultats : la variable X prend les valeurs 1, 2 et 3 avec les probabilités $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{3}$ et $\frac{2}{9}$.

4. On considère 4 lettres et les 4 enveloppes correspondantes. On met au hasard les 4 lettres

dans les enveloppes et on définit la variable aléatoire X comme le nombre de lettres qui atteindront leur (bon) destinataire. Calculer $E(X)$.
Indication : 1 ère méthode : On envisage toutes les éventualités et on en déduit la loi de X puis on calcule l'espérance.
2 ème méthode : On pose $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ et on utilise $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4)$. Cette formule est vraie bien que les 4 variables aléatoires ne soient pas indépendantes.

5. Pour un certain objet, un commerçant constitue chaque début de mois un stock. Les données sont les suivantes :
- le nombre d'objets qui seront demandés par les clients dans le mois est une variable aléatoire X, qui prend les valeurs entières de 11 à 30 avec une loi uniforme de probabilité $\big($ pour $11 \leq n \leq 30$ on a $P(X = n) = \dfrac{1}{20}\big)$;
- tout objet stocké et non vendu dans le mois est perdu ;
- le prix d'achat d'un objet par le commerçant est de 140 euro et son prix de vente est de 200 euro.

a) Le commerçant décide de constituer un stock de k objets en début de mois et on définit la variable aléatoire Y_k =gain du commerçant. Donner la loi de Y_k et calculer $E(Y_k)$.
b) Quelle valeur de k proposeriez vous ?

6. Un ascenseur dessert les k étages d'un immeuble. On suppose que n personnes rentrent dans cet ascenseur (vide) au rez-de-chaussée. On suppose que chacune de ces personnes a une probabilité uniforme $\dfrac{1}{k}$ de sortir à l'un ou l'autre des étages et que personne ne rentre dans l'ascenseur après le rez-de-chaussée.
a) Soit j quelconque entre 1 et k. Quelle est la probabilité que l'ascenseur s'arrête à l'étage numéro j ?
b) Quelle est l'espérance mathématique du nombre d'arrêts de l'ascenseur ?

7. On considère la loi de Poisson prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ (μ est un paramètre positif) :

$$P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!}\, e^{-\mu}$$

Calculer l'espérance, la variance et l'ecart-type de cette loi.

8. On considère la loi de Gauss (ou loi normale) prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$ (μ et σ sont des paramètres positifs) :

$$P(x < X \leq x + dx) = \frac{1}{\sigma\,\sqrt{2\pi}}\, exp\left(-\,\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\, dx$$

Calculer l'espérance, la variance et l'ecart-type de cette loi.