

Statistiques : notes du cours 5
Tests du Chi deux

I. Un exemple de test d'ajustement d'une loi empirique à une loi de probabilité théorique :
En lançant successivement 60 fois un dé, un joueur obtient les résultats suivants :

i (face)	1	2	3	4	5	6
O_i (effectifs observés)	15	7	7	11	6	14

Si le dé n'est pas truqué, sa loi théorique est la **loi uniforme**, c'est-à-dire que chaque face a la même probabilité $\frac{1}{6}$ d'apparaître, donc les effectifs théoriques pour 60 lancés sont de 10 pour chaque face :

i (face)	1	2	3	4	5	6
T_i (effectifs théoriques)	10	10	10	10	10	10

Pour mesurer l'écart entre la loi empirique obtenue et la loi théorique supposée, on calcule la quantité

$$\sum_{i=1}^r \frac{(O_i - T_i)^2}{T_i} \quad (1)$$

appelée *Chi-deux de l'échantillon*. Comme l'on connaît l'effectif total, l'un des 6 effectifs observés peut se déduire des 5 autres : on dit alors que c'est un **khi-deux à 5 degrés de liberté**. Cette quantité est aléatoire puisque si l'on répète la série de 60 lancés on obtiendra un autre Khi-deux. On peut montrer que lorsque la taille (ici $n = 60$) de l'échantillon est assez grande, sa loi de probabilité a une densité $f(x)$ que l'on peut assimiler à celle d'une v.a. notée $\chi^2(5)$. On désigne par t_α la valeur du Khi-deux telle que $P(\chi^2 \geq t_\alpha) = \alpha$. Pour tester la qualité de l'ajustement de la loi empirique du dé à une loi uniforme on procède à un **test du Chi-deux** de la façon suivante :

- on choisit l'hypothèse nulle H_0 selon laquelle "le dé est normal" que l'on teste contre l'hypothèse alternative H_1 selon laquelle "le dé est truqué".
- on choisit un seuil α , risque de rejet à tort de l'hypothèse H_0 , et on en déduit l'intervalle d'acceptation $I(\alpha) := [0, t_\alpha]$ définie par la relation (??). Sous l'hypothèse nulle H_0 , $P(\chi^2 \notin I(\alpha)) = \alpha$.
- On effectue une série de n lancés (n suffisamment grand) puis on calcule le Chi-deux selon la formule (1).
- On conclut : si la valeur trouvée n'appartient pas à $I(\alpha)$, c'est-à-dire si le Chi-deux est plus grand que t_α , on rejette l'hypothèse H_0 et le dé est déclaré truqué. Sinon, l'hypothèse H_0 n'est pas rejetée et on en déduit que les variations d'effectifs observées ne permettent pas de mettre en doute le fait que le dé soit normal.

Remarque : Dans cet exemple la loi considérée comporte 6 classes mais on peut facilement généraliser ce test à des loi comportant r classes. Dans ce cas, le nombre de degrés de liberté de la loi du Chi-deux est $r - 1$, c'est-à-dire qu'il convient de calculer l'intervalle $I(\alpha) = [0, t_\alpha]$ au moyen de la densité de $\chi^2(r - 1)$.

2. Un exemple de test d'homogénéité

Dans une population formée d'individus répartis en différentes catégories (hommes/femmes, classes d'âges, niveaux socio-économiques, etc...), on observe une variable (effet d'un médicament, présence d'un comportement à risque, performances ...) et on se demande si ses variations selon les différentes catégories de la population sont simplement dues aux fluctuations d'échantillonnage ou si au contraire elles révèlent des comportements différents de la variable dans chacune de ces catégories. On peut conclure grâce à un test d'homogénéité dont voici le principe sur un exemple.

Dans une université où les initiatives pédagogiques différenciées sont vivement encouragées trois groupes de professeurs ont mis au point trois méthodes différentes d'apprentissage des Mathématiques qu'on a appliqué à trois échantillons d'étudiants ayant sensiblement le même niveau initial. A l'examen les résultats furent les suivants :

Observés	Admis	Ajournés	sommes
Méthode 1	51	29	
Méthode 2	38	12	
Méthode 3	86	34	
sommes			

Peut-on affirmer que l'une des trois méthodes est plus efficace que les autres en termes de réussite à l'examen? Pour répondre à cette question, on teste l'hypothèse H_0 : *il n'y a pas de différence significative entre les pourcentages de réussite de ces trois groupes d'étudiants*, contre l'hypothèse H_1 : *une au moins de*

ces méthodes est significativement plus efficace que les autres. Pour effectuer ce test on compare le **tableau des effectifs observés** ci-dessus au **tableau des effectifs théoriques** ci-dessous correspondant à une population, regroupant les trois groupes, qui serait parfaitement homogène si H_0 était vrai. Le nombre théorique d'admis parmi les étudiants ayant suivi la méthode 1 sera égal à $56 = \frac{175}{250}80$ car il y a un taux de réussite global de $175/250 = 70\%$ et le nombre total d'étudiants ayant suivi la méthode 1 est de 80.

Théoriques	Admis	Ajournés	sommes
Méthode 1	56		80
Méthode 2			50
Méthode 3		36	120
sommes	175	75	250

On calcule alors le Chi deux de ces tableaux $l \times c$ d'effectifs, noté X^2 de la façon suivante :

$$X^2 = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^c \frac{(O_{ij} - T_{ij})^2}{T_{ij}} = \frac{(51 - 56)^2}{56} + \dots + \frac{(34 - 36)^2}{36} \simeq 2,51.$$

Sous des hypothèses généralement satisfaites dans la pratique (échantillons disjoints, sélectionnés de façon indépendante et de taille suffisante), on peut considérer que la quantité X^2 qui est aléatoire (car elle dépend du choix des échantillons) suit une loi du $\chi^2(dl)$ ayant un nombre de degré de liberté dl égal à $dl = (c - 1)(l - 1)$. Pour tout choix d'un seuil α , on construit alors un intervalle d'acceptation $I(\alpha) = [0 ; t_\alpha]$, où t_α est défini par $P(X^2 > t_\alpha) = \alpha$. On conclut, au risque α (c'est-à-dire avec une probabilité de rejet à tort de α), que :

- Si $X^2 \geq t_\alpha$, l'hypothèse H_0 doit être rejetée, c'est-à-dire que les trois méthodes d'apprentissage ne peuvent être considérées comme équivalentes.
- Si $X^2 < t_\alpha$, on ne peut pas rejeter l'hypothèse H_0 , c'est-à-dire que, malgré les différences de résultats à l'examen, les méthodes se valent.

Un exemple de test d'indépendance

Rappelons que deux variables aléatoires X et Y prenant les valeurs $\{x_1, \dots, x_i, \dots, x_l\}$ et $\{y_1, \dots, y_j, \dots, y_c\}$ avec les probabilités $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$ et $\mathbb{P}(Y = y_j) = q_j$ sont dites indépendantes si et seulement si $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j) = p_i q_j$. Pour tester l'indépendance de deux caractères, on peut utiliser un test du Chi deux de la façon suivante : on réunit dans un tableau les effectifs $O_{i,j}$ d'individus donnant à X et Y les valeurs (x_i) et (y_j) et on calcule les effectifs théoriques à partir de la proportion théorique produit $p_i q_j$. Voici un exemple.

On veut savoir si l'efficacité d'un vaccin contre la grippe est indépendante du fait qu'on l'administre à des patients de moins de 55 ans ou à des patients strictement plus âgés. Considérons un échantillon A de personnes vaccinées de 55 ans ou moins, et un échantillon B de personnes vaccinées de plus de 55 ans.

Observés	Grippés	Non-grippés	sommes
A	38	82	120
B	72	108	180
sommes	110	190	300

Sous l'hypothèse H_0 : les deux caractères sont indépendants, les proportions conjointes sont :

Pr. théoriques	Grippés	Non-grippés	Proportions
A	0,15	0,25	0,4
B	0,22	0,38	0,6
Proportions	0,37	0,63	1

Comme la population totale est de 300, on en déduit que les effectifs théoriques sous l'hypothèse H_0 sont

Effec. théoriques	Grippés	Non-grippés
A	44
B	114

On calcule alors le X^2 de ces échantillons, qui suit une loi du χ^2 à $(l-1)*(c-1) = 1$ degrés de libertés : $X^2 = \frac{(38-44)^2}{44} + \dots + \frac{(108-114)^2}{114} = 2,15$. Au risque $\alpha = 10\%$, l'intervalle d'acceptation $I(\alpha) = [0 ; t_\alpha]$ est $I(\alpha) = [0 ; 2,71]$. Nous voyons donc qu'ici on ne peut pas rejeter H_0 : il est bien possible que malgré les différences d'âge, l'efficacité du vaccin soit la même.