Asymptotique des oscillations du prix d'une option dans un modèle d'arbre*

Francine Diener et Marc Diener
Laboratoire C.N.R.S. Jean-Alexandre Dieudonné
Université de Nice Sophia-Antipolis
Parc Valrose F06108 Nice cedex 2

1er septembre 2000

Résumé

Il est bien connu que le prix d'une option européenne calculé dans un modèle d'arbre binomial converge vers le prix Black-Scholes lorsque le pas de temps tend vers zéro. De plus, on a pu observer empiriquement que la convergence est oscillante et d'ordre $1/n$. Dans ce papier, nous établissons, grâce à des calculs asymptotiques d'intégrales de Laplace, la présence d'oscillations en en calculant explicitement l'asymptotique. Ceci nous permet de montrer notamment qu'il n'existe pas de développement asymptotique du prix au sens usuel du terme, mais que la vitesse de convergence est bien en $1/n$ parce que le premier terme (en $1/\sqrt{n}$) est nul, le terme suivant étant de la forme $C(n)/n$, où $C(n)$ est une fonction bornée de n n'ayant pas de limite lorsque n tend vers l'infini.

1 Introduction

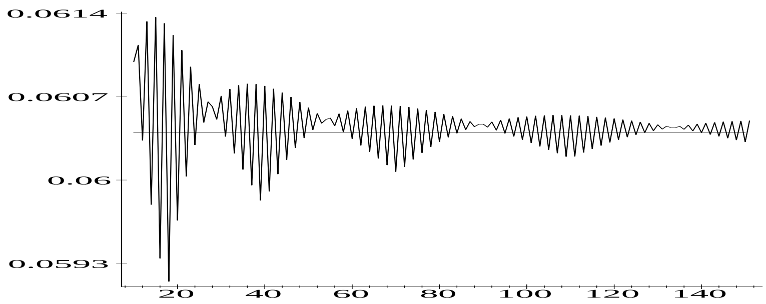


FIG. 1: Prix d'une option call $C(n)$ en fonction du nombre n de pas de temps (la ligne horizontale est le prix Black-Scholes, limite de $C(n)$ lorsque n tend vers l'infini).On notera la présence de festons, ou points de rebroussement, dans les deux courbes enveloppes et, lorsque n croît, une alternance de périodes durant lesquelles l'écart à la limite décroît suivies de périodes durant lesquelles il croît à nouveau.

Il y a principalement trois méthodes pour calculer les prix d'actifs financiers dérivés tels que les options : les méthodes d'arbres, les méthodes numériques de résolution d'équations aux dérivées partielle et les méthodes de Monte Carlo. Bien que les méthodes d'arbres soient les plus rudimentaires, elles restent d'un usage fréquent, principalement parce qu'elles sont vraiment faciles à comprendre, et donc à utiliser en toute sécurité. De plus, on sait qu'elles convergent lorsque le nombre de pas tend vers l'infini et donc qu'il suffit de choisir un nombre de pas suffisant pour que la valeur obtenue soit satisfaisante.

*Cette recherche a débuté à l'occasion d'un séjour effectué par les auteurs dans l'équipe du projet Omega de l'INRIA de Sophia-Antipolis ainsi qu'au centre de recherche OCIAM de l'Université d'Oxford à l'automne et l'hiver 1998. L'idée d'appliquer les méthodes asymptotiques à des problèmes de finance mathématique remonte à une visite l'Institut Newton de Cambridge au printemps 1995 où un double programme d'asymptotique exponentielle et de finance mathématique s'est déroulé simultanément. Ces visites ont été l'occasion de fructueuses discussions, notamment avec Imme van den Berg, Ellis Cumberbatch, Damien Lamberton, Claude Martini, Adri Olde Daalhuis, Bruno Salvy, et Denis Talay.

Pourtant peu de résultats théoriques existent concernant la convergence (combien de pas faut-il pour obtenir une précision donnée ?), sa nature, monotone ou oscillante (le résultat obtenu est-il sous-estimé ou sur-estimé ?) ou l'incidence de la position du prix d'exercice de l'option K ou des barrières (s'il s'agit d'options barrières) par rapport aux noeuds de l'arbre (est-il préférable de choisir l'arbre de telle sorte qu'il contienne la valeur en question ou non ?).

On comprend pourquoi les réponses à ces questions ne sont pas évidentes sur la figure 1 où l'on a représenté le prix d'une option call européenne $C(n)$ en fonction du nombre n de pas de temps. On observe des oscillations assez irrégulières et pourtant les valeurs de $C(n)$ pour les n pairs et celles pour les n impairs semblent s'aligner sur deux courbes enveloppant les oscillations, courbes qui présentent des points de rebroussement (festons) étonnants.

Une bonne façon de répondre aux questions posées serait de calculer les équations de ces deux courbes, ou du moins d'en calculer une approximation. C'est l'objet de cet article. Pour cela nous proposons une nouvelle méthode de calcul de l'asymptotique du prix d'une option en fonction du nombre n de pas. Elle consiste à remplacer les sommes binômiales qu'il comporte par des intégrales eulériennes et à estimer ces intégrales par une méthode de Laplace étendue. On montrera ainsi notamment que l'écart à la limite est, dans le cas d'une option européenne, de la forme $\frac{C_2(n)}{n} + o(\frac{1}{n})$, où $C_2(n)$ est une fonction qui reste bornée quand n tend vers l'infini. Un calcul explicite de $C_2(n)$ fournit alors une excellente approximation de l'équation des deux courbes enveloppes que l'on devine sur la figure 1.

L'asymptotique du prix que nous obtenons montre que la vitesse de convergence de $C(n)$ est bien en $\frac{1}{n}$ (et non en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ comme cela est notamment affirmé dans [10]) mais nous verrons que la fonction $C(n)$ (dont nous donnons l'expression explicite dans deux cas particuliers (corollaires 6 et 7) n'a pas de limite quand n tend vers l'infini. Ceci explique que les auteurs qui ont cherchés à prouver l'existence d'un développement asymptotique du prix de la forme $BS + \frac{C_2}{n} + o(\frac{1}{n})$ n'y soient pas parvenus, car nous verrons qu'un tel développement n'existe pas.

La présence d'oscillations dans le prix $C(n)$ est un phénomène connu des utilisateurs et il a été souligné par différents auteurs ([4], [11],[13]) qui cherchaient en général à tirer profit de ces oscillations pour tenter d'améliorer la précision de leurs calculs de prix, sans toutefois apporter de véritables explications. Dans ([13]), Leisen et Reimer expliquent joliment la présence des festons et fournissent une tentative de majoration de l'ecart à la limite. Concernant la vitesse de convergence en $\frac{1}{n}$d'expressions telles que $C(n)$, des résultats fins ont été obtenus par Talay et Tubaro [15] qui montrent que, dans le cas d'une espérance $\mathbb{E}(f(S_T))$ où S_t est solution de l'équation différentielle stochastique $dS_t = \sigma S_t dW_t$, lorsque f est une fonction lisse, l'erreur commise en calculant une approximation par un schéma d'Euler est de la forme $\frac{C}{n} + o(\frac{1}{n})$, où C est une constante explicite. La convergence en $\frac{1}{n}$ dans le cas où f est lisse est également soulignée dans [10]. Mais ces résultats ne s'appliquent pas au cas du call, parce qu'alors, f est seulement une fonction continue (et non lisse). Lamberton [12], a également obtenu une estimation en $\frac{1}{n}$ dans le cas où f est seulement lipschitzienne, mais sous l'hypothèse que le sous-jacent discret est de la forme $\frac{\sum X_s}{\sqrt{n}}$, pour une famille i.i.d. de v.a. X_s telles que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X^3) = 0$, $\mathbb{E}(X^2) = 1$ et $\mathbb{E}(X^4) < \infty$, conditions qui, elles non plus, ne sont pas satisfaites dans la situation considérée ici à cause du choix de la probabilité $p(n)$ de martingale différente de $\frac{1}{2}$. En réalité nous allons voir que le prix $C(n)$ qui est la différence de deux termes dont la vitesse de convergence est, séparément, en $\frac{1}{\sqrt{n}}$, ne converge lui-même en $\frac{1}{n}$ que parce qu'en effectuant la différence, les deux termes en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ se compensent exactement. Ce phénomène d'annulation ne se reproduit d'ailleurs pas pour les termes suivants le développement comportant en général, au dela du terme $\frac{C_2(n)}{n}$, un terme $\frac{C_3(n)}{n\sqrt{n}}$ et ainsi de suite.

2 Rappels sur le modèle

Dans ce paragraphe, nous rappelons tout d'abord comment se calcule, dans le modèle binômial de Cox, Ross et Rubinstein, le prix d'une options européenne, et au passage nous introduisons les notations utilisées par la suite. Puis nous énonçons le principal résultat de cet article qui est l'existence d'un développement asymptotique du prix d'un type un peu particulier, que nous appelons *développement asymptotique à coefficients bornés*.

2.1 Modèle de l'actif sous-jacent

Suivant la démarche de Cox, Ross et Rubinstein [5] inspirée d'une suggestion de l'économiste W. Sharpe, on modélise le prix (S_t) de l'actif financier sous-jacent aux options à évaluer par une *marche aléatoire finie* définie par

– une suite finie d'instants $t \in \{0, \delta t, \ldots, n\delta t\} = : [0..T]_{\delta t}$, la date finale $T = n\delta t$ étant souvent choisie égale à 1 (et donc, dans ce cas, $\delta t = T/n = \delta t(n)$).
– une valeur initiale S_0 (à l'instant $t = 0$),
– une dynamique caractérisée par l'existence, à chaque période de deux possibilités, le prix de l'actif étant multiplié par un facteur $U_{t+\delta t} := \frac{S_{t+\delta t}}{S_t}$ valant soit u (comme *up*), soit d (comme *down*), avec

$$d < e^{r\delta t} < u, \tag{1}$$

où r représente le taux sans risque,
– les rapports $U_t = \frac{S_t}{S_{t-dt}}$ sont des variables aléatoires de Bernouilli i.i.d. ; on pose $p := \mathbb{P}\{U_t = u\}$ et, par consequent, $1 - p = \mathbb{P}\{U_t = d\}$.

Le choix de p sera défini plus bas ; avec ce choix, le processus du prix du sous-jacent (S_t) est donc, pour chaque $t = \nu\delta t$, une v.a. binômiale, prenant les $\nu + 1$ valeurs distinctes

$$S_\nu^j = S_0 u^j d^{\nu-j}, \;\; j = 0, \ldots, \nu$$

avec les probabilités

$$\mathbb{P}\{S_{\nu\delta t} = S_\nu^j\} = \binom{\nu}{j} p^j (1-p)^{\nu-j}.$$

Il est commode d'introduire une notation pour la dynamique sans risque : ainsi, on pose

$$B_t = B_{\nu\delta t} := B_0 e^{r\nu\delta t} = B_0 e^{rt}.$$

2.2 La "formule exacte" du prix d'une option européenne

On désigne par (C_t) le prix d'une option européenne d'échéance $T = n\delta t$ et de fonction de paiment $\varphi(S_T)$. Dans le modèle discret de Cox, Ross et Rubinstein, ce prix est égal, comme dans la théorie de Black-Scholes, au prix d'un portefeuille autofinançant de valeur finale $C_T = \varphi(S_T)$. Lorsqu'on se place sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, un raisonnement simple permet de calculer la valeur de ce portefeuille, qu'on appelle *portefeuille de couverture*, par récurrence rétrograde à partir de ses valeurs finales. En examinant attentivement le prix ainsi calculé, on s'aperçoit alors qu'il est en fait égal à l'espérance de la fonction de paiment actualisée $\varphi(S_T)/B_T$, à condition de choisir pour probabilité sur le processus sous-jacent S_t la valeur de p telle que

$$pu + (1-p)d = e^{rT/n}. \tag{2}$$

En fait, cette condition confère au processus de *prix actualisé* $\tilde{S}_t := S_t/B_t$ la propriété d'être une martingale. Si l'on désigne par $p(n)$ la probabilité vérifiant la relation de martingale (2) pour se rappeler du fait qu'elle dépend de n, non seulement à travers le terme $e^{rT/n}$ mais aussi à travers u et d qui eux-même dépendront de n, on a donc :

$$p(n) = \frac{e^{rT/n} - d}{u - d}. \tag{3}$$

Cette probabilité $p(n)$ est souvent appelée *probabilité de martingale* ou *probabilité risque neutre*. Si l'on note $C(n)$ le prix à l'instant 0 d'une option européenne de valeur finale $\varphi(S_T)$ lorsque $T = n\delta t$, on a donc :

$$C(n) = e^{-rT} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p(n)^j (1-p(n))^{n-j} \varphi(S_0 u^j d^{n-j}). \tag{4}$$

Dans le cas où l'option considérée est un call, c'est-à-dire si $\varphi(S_T) = (S_T - K)^+$, on peut réécrire cette formule comme différence de deux termes

$$C(n) = S_0 \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \left(p(n) u e^{-r\frac{T}{n}}\right)^j \left((1-p(n)) d e^{-r\frac{T}{n}}\right)^{n-j} - K e^{-rT} \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} p(n)^j (1-p(n))^{n-j}$$

en sommant à partir de k, où $k = k(n)$ est le plus petit entier j tel que $S_0 u^j d^{n-j} > K$.

En posant

$$q(n) = p(n) u e^{-r\frac{T}{n}} \tag{5}$$

et en observant qu'alors, en vertu de la propriété de martingale (2), on a $(1-p(n))de^{-r\frac{T}{n}} = 1-q(n)$, on voit que le prix $C(n)$ peut finalement s'écrire :

$$C(n) = S_0 \Phi(n, k(n), q(n)) - Ke^{-rT} \Phi(n, k(n), p(n)), \tag{6}$$

où Φ désigne la somme binômiale incomplète :

$$\Phi(n, k, p) \ := \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}. \tag{7}$$

La formule (6) du prix $C(n)$ de l'option, que Cox et Rubinstein [5] appellent *exact pricing formula*, est très semblable à la fameuse formule de Black et Scholes ; comme dans celle-ci, on y reconnait les deux composantes du portefeuille de couverture, en actif sous-jacent et en argent respectivement. Une différence importante existe cependant entre ces deux formules. La première fournit un prix $C(n)$ qui dépend effectivement de n, et la seconde fournit un prix indépendant de n. Il est bien connu que lorsque n tend vers l'infini, la "limite" du modèle Cox-Ross-Rubinstein est le modèle Black-Scholes (voir par exemple [14] ou [2]). On doit donc avoir

$$\lim_{n\to\infty} C(n) = BS$$

où BS désigne le prix du call obtenu dans le modèle continu correspondant, c'est-à-dire la quantité :

$$BS := S_0 \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT} \mathcal{N}(d_2)$$

avec $d_1 = (\ln \frac{S_0}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})/\sigma\sqrt{T}$ et $d_2 = (\ln \frac{S_0}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})/\sigma\sqrt{T}$ et $\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$. Bien entendu, nous retrouverons ce résultat dans les calculs asymptotiques qui suivent. Mais pour comprendre la présence des oscillations observées (voir figure 1), il convient d'étudier plus finiment l'écart $C(n) - BS$ quand n tend vers l'infini.

2.3 Asymptotique du prix de l'option

Pour étudier le comportement du prix $C(n)$ quand n tend vers l'infini, la première idée est de rechercher un développement asymptotique en puissance de $1/\sqrt{n}$ (ou de $1/n$?) de cette fonction de n. En réalité nous allons voir qu'il n'existe pas de développement asymptotique au sens habituel du terme même dans les situations les plus simples mais qu'il est possible cependant de calculer explicitement l'asymptotique de ce prix dans les cas où les quantités u et d qui caractérisent le modèle choisi ont elles-même de bonnes propriétés asymptotiques.

Nous allons faire sur la marche (S_t) les hypothèses assez générales suivantes

$$u \text{ et } d \text{ admettent un développement convergent en série de puissances de } \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{8}$$

de la forme

$$u(n) = 1 + \sigma/\sqrt{n} + O(\tfrac{1}{n}) \quad \text{et} \quad d(n) = 1 - \sigma/\sqrt{n} + O(\tfrac{1}{n}) \ , \sigma \neq 0 \tag{9}$$

On pourra prendre par exemple pour u et d les quantités $1 \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \frac{\mu}{n}$, où σ et μ sont des constantes, ce que nous ferons dans les exemples ci-dessous. Ceci permet d'étudier l'influence de la tendance μ sur l'amplitude des oscillations du prix (voir la figure 3). On peut aussi considérer, comme Cox et Rubinstein, l'exemple de $e^{\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ pour lequel les noeuds de l'arbre binomial sont alignés horizontalement (puisque dans ce cas $ud = 1$). Cette propriété géométrique rend possible la généralisation du théorème 1 obtenu ici au cas des options barrières.

Lorsque u et d satisfont ces hypothèses (8) et (9), les quantités $p(n)$ et $q(n)$ qui apparaissent dans la "formule exacte" (6) de $C(n)$ possèdent des développements asymptotiques et on peut donc envisager de calculer un développement pour $C(n)$. La difficulté va venir de la quantité $k(n)$: par définition $k(n)$ est le plus petit entier tel que $S_0 u^j d^{n-j} > K$. Si l'on désigne par $a(n)$ la quantité

$$a(n) := \frac{\ln(K/S_0) - n \ln d}{\ln u - \ln d} \tag{10}$$

on a

$$k(n) = [a(n)] + 1 = a(n) + 1 - \{a(n)\} \tag{11}$$

où $[.]$ désigne la partie entière et $\{.\}$ la partie fractionnaire. On comprend donc que si $a(n)$ admet bien, sous nos hypothèses sur u et d, un développement asymptotique, ce n'est plus le cas pour $\{a(n)\}$ qui n'a généralement pas de limite lorsque n tend vers l'infini ; dès lors, la fonction $k(n)$ n'en a pas non plus. Cependant la partie fractionnaire $\{a(n)\}$ reste, pour tout n, comprise entre 0 et 1. La présence de cette partie fractionnaire $\{a(n)\}$, non développable mais bornée, nous conduit à introduire à présent un calcul asymptotique étendu :

Définition : On appellera *développement asymptotique à coefficients bornés* en série de puissances de $\varepsilon > 0$ à l'ordre m toute expression

$$\sum_{i=0}^{m} f_i(\varepsilon)\varepsilon^i \quad + \quad \varepsilon^m \delta_m(\varepsilon),$$

où les f_i sont des fonctions bornées de ε et $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \delta_m(\varepsilon) = 0$.

Soit $(f_i)_{i \geq 0}$ une suite de fonctions *bornées ;* on dira qu'une fonction $f(\varepsilon)$ admet un développement asymptotique en série de puissances de ε de coefficients $(f_i)_{i \geq 0}$ si, pour tout $m \geq 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{-m} \left(f(\varepsilon) - \sum_{i=0}^{m} f_i(\varepsilon)\varepsilon^i \right) = 0$$

Il n'y a bien-entendu pas unicité du développement à coefficients bornés d'une fonction. Ce texte n'est pas le lieu pour une étude systématique des développements à coefficients bornés, qui restent à examiner plus attentivement.

A noter que les valeurs $f_i(\varepsilon)$ peuvent être des nombres, mais aussi, plus généralement, des éléments d'un espace normé, tels l'ensemble $\mathcal{L}^1$ des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, comme ce sera le cas ici.

Théorème 1 *Si l'on suppose que u et d admettent des développements asymptotiques en puissance de $1/\sqrt{n}$ de la forme*

$$u = 1 + \sigma/\sqrt{n} + O(\tfrac{1}{n}) \quad et \quad d = 1 - \sigma/\sqrt{n} + O(\tfrac{1}{n}) \ , \ \sigma \neq 0$$

alors le prix $C(n)$ d'une option européenne dans le modèle Cox, Ross et Rubinstein admet un développement asymptotique à coefficients bornés *de la forme*

$$C(n) = C_0 + \frac{C_1(n)}{\sqrt{n}} + \frac{C_2(n)}{n} + \frac{C_3(n)}{n\sqrt{n}} + \dots$$

avec $C_0 = BS$, $C_1(n) = 0$, et, pour $i = 2, 3, \dots$, $C_i(n)$ des fonctions bornées et calculables explicitement par la méthode de Laplace étendue exposée ci-dessous.

Commentaire : Il n'y a rien d'étonnant dans le fait que la limite de $C(n)$ soit le prix Black-Scholes. En revanche on notera que le terme C_1 est nul, et donc que la convergence "est en $\frac{1}{n}$". Cependant le terme $C_3(n)$ n'étant généralement pas nul, ce développement est bien un développement en puissances de $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Nous avons décomposé la preuve de ce théorème en plusieurs parties :

- la mise en place de la méthode de Laplace étendue (paragraphe 3),
- les détails techniques de la preuve, qui font l'objet d'un Théorème Technique (théorème 8), sont renvoyés en annexe (Annexe B).
- la méthode de calcul effectif des dévelopements, illustrée de résultats graphiques (paragraphe 4) ; on obtient ainsi C_0, $C_1(n)$ qui se révèle nul, et $C_2(n)$; le calcul des valeurs suivantes $C_i(n)$ pour $i > 2$ s'obtiendrait de la même façon, avec cependant une "explosion de compléxité" qu'il convient de ne pas sous estimer. Les feuilles de calcul `Maple` sont données dans l'annexe A

3 Methode de Laplace étendue

Dans ce paragraphe nous montrons comment est mis en oeuvre le calcul asymptotique du prix $C(n)$ donné par la *formule exacte* (6) :

$$C(n) = S_0 \Phi(n, k(n), q(n)) - K e^{-rT} \Phi(n, k(n), p(n))$$

où Φ désigne la somme binômiale incomplète $\Phi(n, k, p) := \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$.

3.1 Asymptotique des données

Nous supposons que u et d possèdent un développement en puissance de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ de la forme (9) indiquée ci-dessus. Un calcul élémentaire de développements asymptotiques conduit tout d'abord au résultat suivant :

Proposition 2 *Supposons que u et d satisfassent à (8) et (9) et posons*

$$u(n) = \tfrac{1}{2} + \sigma \tfrac{1}{\sqrt{n}} + u_2 \tfrac{1}{n} + \ldots \quad \text{et } d(n) = \tfrac{1}{2} - \sigma \tfrac{1}{\sqrt{n}} + d_2 \tfrac{1}{n} + \ldots$$

Alors les quantités p, q, et a définies par (3), (5), et (10) admettent un développement asymptotique en série de puissances de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ de la forme

$$\begin{aligned} p(n) &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{p_1}{\sqrt{n}} + O(\tfrac{1}{n}), \\ q(n) &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{q_1}{\sqrt{n}} + O(\tfrac{1}{n}), \\ a(n) &= \tfrac{1}{2}n + a_{-1}\sqrt{n} + a_0 + O(\tfrac{1}{\sqrt{n}}), \end{aligned}$$

où $p_1 = \frac{1}{4\sigma}(2r - (u_2 + d_2))$, $q_1 = \frac{1}{4\sigma}(2r - (u_2 + d_2) + 2\sigma^2)$, $a_{-1} = \frac{1}{4\sigma}(2\ln(K/S_0) - (u_2 + d_2) + \sigma^2)$ et $a_0 = \frac{1}{8\sigma^2}(2\ln(K/S_0) - (u_2 + d_2) - \sigma^2)(u_2 - d_2)$.

Corollaire 3 *Si l'on pose $\overline{\kappa}(n) := \{a(n)\}$, on obtient pour l'entier $k(n)$ défini par (10-11) le développement à coefficients bornés suivant :*

$$k(n) = \tfrac{1}{2}n + a_{-1}\sqrt{n} + a_0 + 1 - \overline{\kappa}(n) + O(\tfrac{1}{\sqrt{n}}) \tag{12}$$

3.2 Paramètre figé et fonction Beta incomplète

Un point important[1] dans l'asymptotique que nous abordons ici – surtout lorsque la tâche de calcul sera laissée à `Maple` – est de traiter κ comme un paramètre *figé*, c'est-à-dire de ne pas tenter à développer $\overline{\kappa}(n)$ (un tel développement n'existe d'ailleurs pas), mais au contraire d'attendre la fin de tout le processus de calcul asymptotique pour "se souvenir" que κ admet une valeur qui est fonction de n. A noter que la fonction $\overline{\kappa}$ est bornée par définition. Les calculs asymptotiques avec κ figé feront apparaître des expressions polynômiales en κ, typiquement $d_i(Y, \kappa)$; dès lors, les $n \mapsto d_i(\cdot, \overline{\kappa}(n))$ seront des fonctions bornées (à valeurs dans l'espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions intégrables de la variable notée ici Y).

L'intrusion de $\mathcal{L}^1$ – c'est-à-dire d'intégrales – dans ce contexte, qui ne faisait jusqu'ici intervenir que des sommes finies, est liée à l'usage du lemme suivant, qui apparaît ici comme une *formule magique*[2]. Cette formule va permettre de réécrire le prix $C(n)$, donné par la formule (6), sous une *forme intégrale* qui rendra possible son évaluation asymptotique.

Lemme 4 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout k, $0 < k \leq n$, on a :*

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = k \binom{n}{k} \int_0^p y^{k-1}(1-y)^{n-k} dy.$$

Preuve : L'identité s'obtient facilement en intégrant par parties $(n-k)$ fois son membre de droite. □

En utilisant cette formule, le prix (6) peut s'écrire sous la forme intégrale suivante, à laquelle nous pourrons appliquer une version adaptée de la *méthode de Laplace*. Cette nouvelle expression de de la formule de Cox-Ross-Rubinstein est la clef de la preuve du théorème 1 (voir l'annexe B).

Proposition 5 (version intégrale de la formule de Cox-Ross-Rubinstein)

$$C(n) = k(n) \binom{n}{k(n)} \left(S_0 \int_0^{q(n)} y^{k(n)-1}(1-y)^{n-k(n)} dy - Ke^{-rT} \int_0^{p(n)} y^{k(n)-1}(1-y)^{n-k(n)} dy \right). \tag{13}$$

[1] C'est Laurent Prignaux, élève de l'Ecole des Mines de Paris, stagiaire au projet Oméga de l'Inria Sophia-Antipolis au printemps 99, qui a le premier introduit une notation dans ses calculs qui revenait à figer ce que nous notons ici $\overline{\kappa}(n)$.

[2] Un grand merci à Adri Olde Daalhuis qui a attiré notre attention sur les vertus de la fonction Beta incomplète ([1], p. 263 et 944).

3.3 Mise en oeuvre de la méthode de Laplace

Dans l'expression précédente (13), il y a deux intégrales très semblables qui peuvent être traitées de la même manière. Nous allons restreindre l'exposé de la méthode à l'une d'elle notée $I^p(n)$:

$$I^p(n) := \int_0^{p(n)} y^{k(n)-1}(1-y)^{n-k(n)}dy.$$

Comme le premier terme de l'asymptotique de la fonction $k(n)$ est $\frac{n}{2}$, il est naturel de réécrire l'intégrant de la façon suivante :

$$y^{k(n)-1}(1-y)^{n-k(n)} = (y(1-y))^{\frac{n}{2}}\left(\frac{y}{1-y}\right)^{k(n)-\frac{n}{2}-1}\frac{1}{1-y},$$

Si l'on note $h(y) := \frac{1}{2}\ln y(1-y)$ et $g(y) := (\frac{y}{1-y})^{k(n)-\frac{n}{2}-1}\frac{1}{1-y}$, l'intégrale considérée prend alors la forme d'une *intégrale de Laplace :*

$$\int_0^p e^{nh(y)}g(y)dy. \tag{14}$$

Rappelons tout d'abord en quoi consiste la méthode de Laplace dans le cas usuel ; on suppose que l'intervalle d'intégration, ici $[0,p]$, contient un unique maximum y_0 de la fonction $h(y)$.On pose alors $Y = (y-y_0)\sqrt{n}$. Dans la nouvelle variable Y, l'intégrale s'écrit alors, avec comme ici $y_0 = \frac{1}{2} = p_0$,

$$\int_0^p e^{nh(y)}g(y)dy = \int_{-\frac{\sqrt{n}}{2}}^{(p-\frac{1}{2})\sqrt{n}} e^{nh(\frac{1}{2}+\frac{Y}{\sqrt{n}})}g\left(\frac{1}{2}+\frac{Y}{\sqrt{n}}\right)\frac{dY}{\sqrt{n}}$$

et donc, comme $h'(\frac{1}{2}) = 0$,

$$\int_0^p e^{nh(y)}g(y)dy = \frac{e^{nh(\frac{1}{2})}}{\sqrt{n}}\int_{-\frac{\sqrt{n}}{2}}^{(p-\frac{1}{2})\sqrt{n}} e^{-\frac{Y^2}{2}(-h''(\frac{1}{2})+\dots)}g\left(\frac{1}{2}+\frac{Y}{\sqrt{n}}\right)dY.$$

Un développement de Taylor de h et de g conduit à un développement asymptotique en puissances de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ de l'intégrant de cette nouvelle intégrale ; après intégration terme à terme de l'intégrale en Y on obtient un développement asymtotiqie dont les coefficients sont des intégrales gaussiennes. Il reste à vérifier que l'on a bien obtenu ainsi un développement asymptotique de l'intégrale.

Dans le cadre d'une intégrale de Laplace usuelle, ces propriétés peuvent être établies et on obtient ainsi un développement asymptotique de l'intégrale, pourvu qu'on prenne pour domaine d'intégration la limite des domaines, c'est-à-dire simplement $Y \in \mathbb{R}$.

Dans le cas que nous considérons ici, on vérifie facilement que le changement de variable $Y = (y-\frac{1}{2})\sqrt{n}$, transforme l'expression (13) de $C(n)$ en

$$C(n,\kappa) := c(n,\kappa)\left(S_0\int_{-\frac{\sqrt{n}}{2}}^{(q-\frac{1}{2})\sqrt{n}}\Theta(Y,n,\kappa)dY - Ke^{-rT}\int_{-\frac{\sqrt{n}}{2}}^{(p-\frac{1}{2})\sqrt{n}}\Theta(Y,n,\kappa)dY\right) \tag{15}$$

où le facteur $c(n,\kappa)$ et l'intégrant $\Theta(Y,n,\kappa)$ sont donnés respectivement par

$$c(n,\kappa) := k(n,\kappa)\binom{n}{k(n,\kappa)}\frac{2^{1-n}}{\sqrt{n}} \tag{16}$$

$$\Theta(n,Y,\kappa) := \left(1-\frac{(2Y)^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1-\frac{2Y}{\sqrt{n}}}{1+\frac{2Y}{\sqrt{n}}}\right)^{k(n,\kappa)-\frac{n}{2}-1}\frac{1}{1-\frac{2Y}{\sqrt{n}}}. \tag{17}$$

On a donc $C(n) = C(n,\overline{\kappa}(n))$. Par la suite on considèrera l'intégrale

$$I^q(n,\kappa) = \int_{-\frac{\sqrt{n}}{2}}^{(q-\frac{1}{2})\sqrt{n}}\Theta(Y,n,\kappa)dY \tag{18}$$

obtenue à partir de $I^q(n)$ en figeant κ, et de même pour $I^p(n,\kappa)$.

Mais deux difficultés nouvelles apparaissent pour appliquer ici la méthode de Laplace, qui ne sont pas présentes dans le cas usuel :

– L'intervalle d'intégration $[0, p(n)]$ varie avec n et son extrémité $p(n)$ tend, lorsque n tend vers l'infini, vers le maximum $y_0 = \frac{1}{2}$ autour duquel s'effectue le changement de variable $Y = (y - y_0)\sqrt{n}$. Selon les hypothèses faites sur u et d, il se peut même que ce maximum n'appartienne pas à l'intervalle $[0, p(n)]$. Ceci aura deux conséquences ; d'une part, comme l'image par le changement de variable de l'intervalle $[0, p(n)]$ est $[-\frac{1}{2\sqrt{n}}, (p(n) - \frac{1}{2})\sqrt{n}]$, les intégrales gaussiennes qui apparaitront dans les coefficients du développement ne seront pas étendues à tout $\mathbb{R}$ mais seulement à un intervalle de la forme $]-\infty, p_1 + \frac{p_2}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{p_{m+1}}{n^{\frac{m}{2}}}]$. D'autre part il faudra tronquer le développement de cette borne d'intégration à un ordre suffisant, par exemple garder le terme $\frac{p_3}{n}$ si l'on veut calculer exactement le terme du développement de l'intégrale d'ordre $\frac{1}{n}$.
– Comme le facteur $g(y)$ est en fait ici une fonction qui dépend à la fois de y et de n, il convient d'examiner avec soin l'image de cette fonction par le changement de variable $Y = (y - \frac{1}{2})\sqrt{n}$ pour s'assurer qu'elle possède bien un développement asymptotique en puissance de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ dont les coefficients sont intégrables sur l'intervalle considéré et tel que le développement asymptotique de l'intégrale puisse effectivement s'obtenir en l'intégrant terme à terme. La preuve de ce point (voir le théorème 8 de l'appendice B) utilise le fait que, comme $k(n, \kappa) - \frac{n}{2} - 1$ est égal à $a_1\sqrt{n} + a_2 - \kappa + o(1)$, on peut utiliser pour développer g, l'identité

$$\left(\frac{1 - \frac{2Y}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{2Y}{\sqrt{n}}}\right)^{\sqrt{n}} = e^{-4Y}\left(1 - \frac{16}{3}\frac{Y^3}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right).$$

4 Résultats

Dans ce paragraphe nous indiquons et commentons les résultats obtenus lorsque l'on applique le théorème 1 pour calculer l'asymptotique du prix d'une option call, pour deux modèles : le modèle de Cox-Rubinstein, et un modèle avec tendance.

4.1 Modèle de Cox et Rubinstein

Considérons tout d'abord le cas où

$$u = e^{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \text{ et } d = e^{\frac{-\sigma}{\sqrt{n}}},$$

exemple suggéré par Cox et Rubinstein et pour lequel les calculs sont les plus simples.

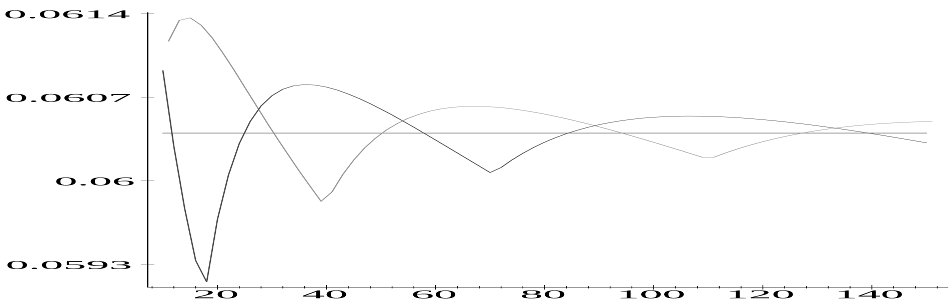
Corollaire 6 (modèle de Cox-Rubinstein) *Si le modèle de l'actif sous-jacent est tel que $u = e^{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ et $d = e^{\frac{-\sigma}{\sqrt{n}}}$, alors le prix en $t = 0$ d'un call valant $(u^j d^{n-j} - K)^+$ à l'instant $T = n\delta t = 1$ satisfait*

$$\begin{aligned} C(n, \kappa) = BS \quad &+ \quad \frac{1}{n}\left\{-\sqrt{\frac{2}{\pi}}Ke^{-r}e^{-\frac{1}{2}(\frac{\sigma}{2} - \frac{r - \ln K}{\sigma})^2}\left(\sigma\kappa(\kappa - 1) + \frac{\sigma^4 + 12(\sigma^2 + r^2) + 8r\ln K + 4(\ln K)^2}{96\sigma}\right)\right\} \\ &+ \quad O(\frac{1}{n\sqrt{n}}) \end{aligned}$$

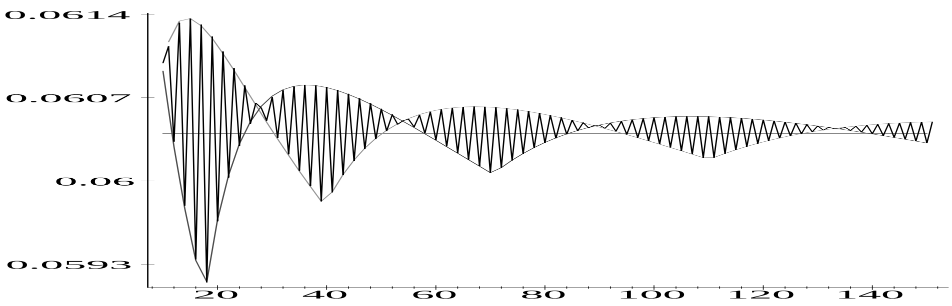
où BS est le prix Black-Scholes et κ désigne la partie fractionnaire de la quantité $a(n) := \frac{\ln K - n\ln d}{\ln u - \ln d}$.

Ce corollaire montre que l'écart entre le prix $C(n)$ et sa limite BS est effectivement de l'ordre de $\frac{1}{n}$ (on a $C(n) = C(n, \overline{\kappa}(n))$ et $\kappa \in [0, 1[$) mais il montre aussi que, comme la quantité κ, bien que comprise entre 0 et 1, n'a pas de limite quand n tend vers l'infini, il n'existe pas de développement asymptotique de $C(n)$ au sens usuel de ce terme.

La formule explicite donnée par ce corollaire permet également de tester la qualité de l'approximation du prix $C(n)$ fournie par son développement asymptotique à coefficients bornés. On peut ainsi comparer, pour chaque valeur de n, la quantité $C(n)$, sa limite lorque n tend vers l'infini (ou approximation à l'ordre zéro) et son approximation à l'ordre 2 donnée par cette formule. La figure 2 montre d'une part (en (a)) l'approximation d'ordre deux de $C(n)$ comme fonction de n, tracée en séparant les valeurs de n paires et impaires et d'autre part (en (b)) la superposition sur le même dessin du prix $C(n)$, de son approximation d'ordre zéro (la constante BS) et de son approximation d'ordre 2. On voit qu'il est difficile de distinguer à l'oeil l'écart entre $C(n)$ et son approximation à l'ordre 2, sauf pour des valeurs très petites de n. On a par exemple, pour les mêmes valeurs des paramètres que celles de la figure 2, les données suivantes :



(a)



(b)

FIG. 2: (a) Graphe de la fonction n figurant dans le membre de droite de la formule du corollaire 6, tracée en séparant les valeurs paires et les valeurs impaires de n, en remplaçant κ par sa valeur en fonction de n (κ est la partie fractionnaire de $a(n)$) et en négligeant le terme $O(\frac{1}{n\sqrt{n}})$. le modèle choisi est celui de Cox et Rubinstein (c'est-à-dire $u = exp(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$) et les valeurs des paramètres choisies sont : $K = 1,1$, $r = 0,05$ et $\sigma = 0,2$. (b) Superposition des valeurs de $C(n)$ données par la formule de Cox et Rubinstein (formules 6 et 7), et de leurs valeurs approchées à l'ordre 2 tracées ci-dessus. Il est difficile de distinguer l'écart entre le prix et son approximation à l'oeil nu, sauf peut-être pour des valeurs de n très petite. La ligne horizontale est le prix Black-Scholes, limite de $C(n)$ lorsque n tend vers l'infini (ou approximation à l'ordre zéro).

n	$C(n)$	BS (approx. d'ordre 0)	Approx. d'ordre 2
50	0.06060695478	0.06040088125	0.06060099755
150	0.06031978406	0.06040088125	0.06031902046

L'examen de la formule du corollaire 6 permet également de comprendre la présence d'oscillations dans le prix du call ainsi que les festons observés pour certaines valeurs particulières de n. En effet, rappelons que la fonction $\overline{\kappa}(n)$ est la partie fractionnaire de $a(n) = \frac{\ln K - n \ln d}{\ln u - \ln d}$ et que cette dernière fonction a un développement asymptotique de la forme $a(n) = \frac{1}{2}n + a_{-1}\sqrt{n} + O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ dans le cas du modèle considéré ici. Le premier terme de ce développement n'apporte aucune contribution à κ lorsque n est pair (car sa partie fractionnaire est nulle) et ajoute au contraire $\frac{1}{2}$ à κ lorsque n est impair. C'est l'origine des oscillations entre valeurs paires et impaires du prix $C(n)$. D'autre part lorsque $a(n)$ est loin d'une valeur entière, sa partie fractionnaire κ varie continuement mais κ va présenter une discontinuité précisément chaque fois que $a(n)$ franchit une valeur entière. Il n'est pas difficile de vérifier sur la définition de $a(n)$ que cela se produit exactement pour les valeurs de n où les festons apparaissent sur les dessins.

Notons que, dans le cas d'un call à la monnaie, c'est-à-dire lorsque $K = S_0$, la fonction $a(n) = \frac{n}{2}$ (car $u = 1/d$ dans ce modèle) et donc les prix $C(n)$ oscillent, comme dans le cas général, mais leur développement asymptotique à coefficients bornés est beaucoup plus simple à calculer (voir [8]) car κ vaut simplement 0 pour les n pairs et $\frac{1}{2}$ pour les n impairs. Il n'y a donc pas de festons dans ce cas.

4.2 Un modèle avec tendance

Une des propriété souvent soulignée du prix Black-Scholes est qu'il ne depend pas de la tendance du modèle choisi pour le sous-jacent. L'étude d'un modèle discret où une tendance μ apparaît explicitement va permettre de souligner qu'au contraire, le prix Cox-Rubinstein $C(n)$ dépend bien de la tendance (la formule suivante précise de quelle façon) et ce n'est qu'à la limite, quand n tend vers l'infini, que la tendance disparaît.

Corollaire 7 (modèle avec tendance) *Si le modèle de l'actif sous-jacent est tel que $u = 1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \frac{\mu}{n}$ et $d = 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \frac{\mu}{n}$, alors le prix en $t = 0$ d'un call valant $(u^j d^{n-j} - K)^+$ à l'instant $T = n\delta t = 1$ satisfait la formule :*

$$C(n,\kappa) = BS + \frac{1}{n}\left\{-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, Ke^{-r}e^{-\frac{1}{2}(\frac{\sigma}{2}-\frac{r-\ln K}{\sigma})^2}\left(\sigma\kappa(\kappa-1) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{-9\sigma^4 + 12(\sigma^2+r^2) + (2r+\ln K)(4\ln K - 16\mu + 8\sigma^2) + 24\mu(\sigma^2+\mu)}{96\sigma}\right)\right\} + O(\frac{1}{n\sqrt{n}})$$

où BS est le prix Black-Scholes et κ désigne la partie fractionnaire de la quantité $a(n) := \frac{\ln K - n\ln d}{\ln u - \ln d}$.

La figure 3 montre les oscillations du prix Cox-Rubinstein $C(n)$ en fonction de n pour trois valeurs différentes du paramètre μ. Dans ce modèle comme dans celui de Cox et Rubinstein (paragraphe précédent), on peut vérifier que cette formule asymptotique (corollaire 7), dans laquelle on néglige le reste $O(\frac{1}{n\sqrt{n}})$, fournit des approximations excellentes du prix $C(n)$. Elle permet ainsi de mieux comprendre l'influence de μ sur les prix.

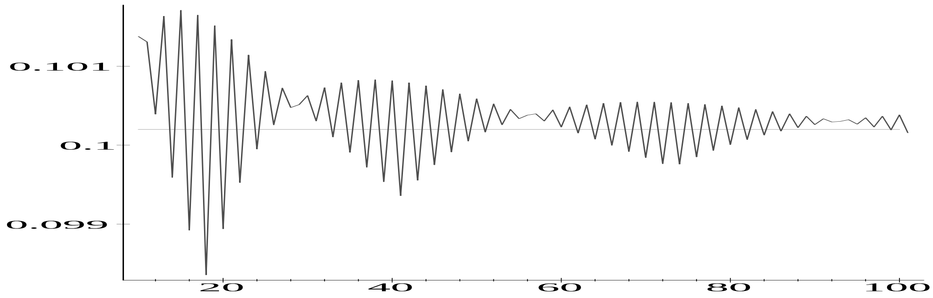
Annexes

A Calculs effectifs des développements sous Maple

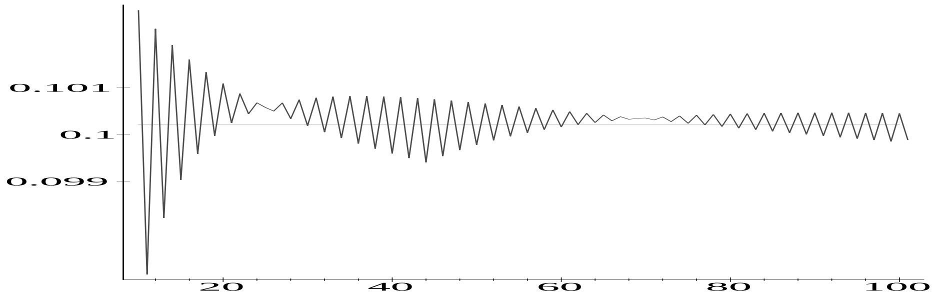
Le théorème 1 affirme l'existence d'un développement asymptotique à coefficients borné de $C(n)$ pour tout modèle de Cox-Ross-Rubinstein satisfaisant les conditions (8)-(9). Ce développement est effectif, mais complexe et fastidieux ; il nous a donc paru essentiel d'en rendre le calcul possible au moyen d'un système de calcul formel ; nous avons choisi `Maple`.

Dans ce paragraphe, nous expliquons tout d'abord les quelques astuces utilisées dans le programme `Maple` qui suit, programme qui permet de calculer les trois premiers termes du développement à coefficients bornés de $C(n)$. Puis nous donnons finalement le programme qui permet, à l'aide des trois coefficients $C0$, $C1$ et $C2$ ainsi obtenus, de tracer les deux courbes que l'on peut voir sur la figure 2.

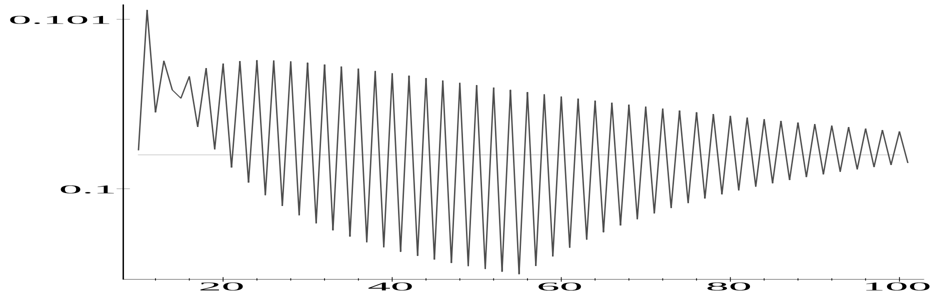
Pour calculer l'asymptotique de $C(n)$, on procède par étapes :



($\mu = 0$)



($\mu = 0.05$)



($\mu = 0.10$)

FIG. 3: Oscillations du prix Cox-Rubinstein (formules 6 et 7) dans un modèle où $u = 1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \frac{\mu}{n}$ et $d = 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \frac{\mu}{n}$ pour trois valeurs différentes du paramètre μ. Les autres paramètres valent respectivement $K = 1, 1$, $r = 0, 05$ et $\sigma = 0, 3$.

1. Tout d'abord on introduit les données du modèle, ici les choix de $u(n)$ et $d(n)$ peuvent être modifiées dans les limites indiquées (8)-(9). Dans le programme ci-dessous on a choisi

$$u(n) = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ , \ d(n) = 1 + \frac{\mu}{n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

   et donc on a :

$$p(n) = \frac{e^{\frac{r}{n}} - d(n)}{u(n) - d(n)} \ , \ a(n) = \frac{L - n \ln d(n)}{\ln u(n) - \ln d(n)} \text{ et } k(n) = a(n) + 1 - \kappa.$$

   Ici L désigne la constante $\ln K$ et κ est figé comme s'il s'agissait d'une quantité indépendante de n.

2. On calcule le développement asymptotique à coefficients bornés de $k(n)$ puis, pour calculer celui de $\binom{n}{k(n)}$, `Maple` rencontre une difficulté. Il cherche à utiliser la formule de Stirling pour calculer les développements asymptotiques de n !, $k(n)$! et $(n - k(n))$! mais il n'y parvient pas car il ne connait de $k(n)$ que son développement asymptotique, qui lui-même dépend de la "constante" κ. On choisit donc d'aider un peu `Maple` en définissant une fonction $Stir(n, m)$ qui retourne un développement asymptotique tronqué de n ! à l'ordre m, puis une fonction Binom (n, k, m) définie à l'aide de cette fonction par :

$$\text{Binom } (n, k, m) := \frac{\text{Stir } (n, m)}{\text{Stir } (k, m) \text{Stir } (n - k, m)}.$$

   Ceci permet finalement de calculer le développement du facteur (16) :

$$c(n, \kappa) = k(n, \kappa) \binom{n}{k(n, \kappa)} \frac{2^{1-n}}{\sqrt{n}}.$$

3. Pour calculer le développement asymptotique de l'intégrale (18)

$$I^p(n, \kappa) = \int_{-\frac{\sqrt{n}}{2}}^{(p-\frac{1}{2})\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(2Y)^2}{n}\right)^n \left(\frac{1 - \frac{2Y}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{2Y}{\sqrt{n}}}\right)^{k(n,\kappa) - \frac{n}{2} - 1} \frac{dY}{1 + \frac{2Y}{\sqrt{n}}}$$

   ainsi que celui de l'intégrale analogue $I^q(n, \kappa)$, on calcule d'abord le développement asymptotique de l'intégrand que l'on tronque à l'ordre souhaité. Puis on intègre ce polynôme en puissance de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ pour Y compris entre $-\infty$ et une borne notée b. Alors seulement on substitue à b le développement asymptotique de $(p - \frac{1}{2})\sqrt{n}$ (respectivement celui de $(q - \frac{1}{2})\sqrt{n}$ pour l'intégrale I^q) avant de faire un nouveau développement asymptotique de l'expression ainsi obtenue.

4. Finalement il ne reste plus dans la dernière étape qu'à assembler les morceaux du puzzle comme dans la formule

$$C(n, \kappa) = c(n, \kappa) \left(S_0 I^q(n, \kappa) - K e^{-rT} I^p(n, \kappa)\right)$$

   pour obtenir le développement cherché, à l'ordre choisi.

A.1 Le programme Maple de calcul des coefficients, avec résultats

Dans le programme qui suit, nous n'avons pas affiché les résultats intermédiaires à l'exception des trois dernières instructions qui calculent les coefficients $C0$, $C1$ et $C2$ du développement asymptotique du prix $C(n, \kappa)$. Le modèle choisi est le modèle avec tendance.

Introduction des données du modèle :

```
> u:=proc(n) option remember; 1+mu/n+sigma/sqrt(n) end:
> d:=proc(n) option remember; 1+mu/n-sigma/sqrt(n) end:
> p:=proc(n) option remember; (exp(r/n)-d(n))/(u(n)-d(n)) end:
> a:=proc(n)(L-ln(d(n))*n)/(ln(u(n))-ln(d(n)))end:### L=ln(K)
> k:=a(n)+1-kappa: ### introduction du paramètre figé kappa
```

Calcul de l'asymptotique du facteur :

```
> asymptk:=map(simplify,eval(subs(O=0,asympt(k,n,3)))):
> stir:=proc(n,m) local nn:
```

```
> eval(subs(nn=n,eval(subs(O=0,asympt(factorial(nn),nn,m))))) end:
> binom:=proc(n,k,m) stir(n,m)/stir(k,m)/stir(n-k,m) end:
> asymptfacteur:=map(simplify,asympt(expand(
exp(asympt(expand(ln(asymptk*binom(n,asymptk,4)*2^(1-n)/sqrt(n))),n,3))),n,3 )):
```

Calcul de l'asymptotique des deux intégrales :

```
> integrand:=(1-(2*Y)^2/n)^(n/2)/(1-2*Y/sqrt(n))*
((1+2*Y/sqrt(n))/(1-2*Y/sqrt(n)))^(asymptk-1-n/2):
> asymptintegrand:=map(expand,asympt(integrand,n,3)):
> integralb:=int(eval(subs(O=0,asymptintegrand)),Y=-infinity..b):
> bornep:=map(simplify,eval(subs(O=0,asympt((p(n)1/2)*sqrt(n),n,3)))):
> q:=p(n)*u(n)*exp(-r/n):
> borneq:=map(simplify,eval(subs(O=0,asympt((q-1/2)*sqrt(n),n,3)))):
> integralp:=map(simplify,asympt(subs(b=bornep,integralb),n,3)):
> integralq:=map(simplify,asympt(subs(b=borneq,integralb),n,3)):
```

Calcul de l'asymptotique du prix $C(n,\kappa)$:

```
> L:=ln(K):
> AsymptCall:=map(simplify,series(eval(
subs(n=1/epsilon^2,asymptfacteur*(integralq-K*exp(-r)*integralp))),epsilon,3)):
> C0:=op(1,AsymptCall);
```

$$C0 := \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}(\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{2}\,(\sigma^2+2\,r-2\ln(K))}{\sigma})+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,K\,e^{(-r)}\,\mathrm{erf}(\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{2}\,(2\,r-2\ln(K)-\sigma^2)}{\sigma})-\frac{1}{2}\,K\,e^{(-r)}$$

C0 est le prix Black-Scholes que l'on reconnait facilement si l'on se souvient que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}erf(\frac{x}{\sqrt{2}})=\mathcal{N}(x)$, fonction de répartition de la loi normale.

```
> C1:=simplify(expand(eval(
subs(exp(1/2*(sigma^2+r-mu)*(-r+2*ln(K)-mu)/sigma^2)=
exp(ln(K))*exp(-1/2*(r*sigma^2-2*r*ln(K)+r^2-mu^2+mu*sigma^2+2*mu*ln(K))/sigma^2),
op(3,AsymptCall))))); ### on aide Maple  simplifier le coefficient d'ordre 1/sqrt(n)
```

$$C1 := 0$$

```
> C2:=simplify(expand(eval(
subs(exp(1/2*(sigma^2+r-mu)*(-r+2*ln(K)-mu)/sigma^2)=
exp(ln(K))*exp(-1/2*(r*sigma^2-2*r*ln(K)+r^2-mu^2+mu*sigma^2+2*mu*ln(K))/sigma^2),
op(5,AsymptCall))))); ### on aide Maple  simplifier le coefficient d'ordre 1/n
```

$$C2 := -\frac{1}{96}\sqrt{2}\,K^{(1/2\,\frac{\sigma^2+2\,r}{\sigma^2})}(16\,r\,\sigma^2+12\,r^2+24\,\mu\,\sigma^2-16\ln(K)\,\mu+24\,\mu^2+96\,\sigma^2\,\kappa^2$$
$$+8\ln(K)\,\sigma^2+12\,\sigma^2-32\,\mu\,r-96\,\kappa\,\sigma^2+4\ln(K)^2+8\ln(K)\,r-9\,\sigma^4)$$
$$e^{(-1/8\,\frac{4\ln(K)^2+\sigma^4+4\,r\,\sigma^2+4\,r^2}{\sigma^2})}\,/(\sigma\,\sqrt{\pi})$$

A.2 Le programme Maple de tracé des courbes enveloppes

Ce programme est conçu pour être utilisé à la suite du précédent car il utilise les coefficients du développement de $C(n,\kappa)$ calculés dans ce dernier.
Tracé du prix, calculé par la formule de Cox-Rubinstein, comme fonction de n :

```
> plus:=proc(x) if evalf(x)>0 then x else 0 fi end:
> call:=proc(n);
> sum(binomial(n,j)*p(n)^j* (1-p(n))^(n-j)*'plus(u(n)^j*d(n)^(n-j)-K)',
j=0..n)*exp(-r) end:
```

```
> n0:=10:n1:=150:K:=1.1:r:=0.05:sigma:=0.2:
> with(plots):
> C:=plot(evalf(['[n,call(n)]' $n=n0..n1+1]),style=line,color=black):
> display({C}):
```

Tracé de l'asymptoptique du prix tronqué à l'ordre zéro, puis à l'ordre deux, comme fonction de n, en séparant les valeurs correspondant à n pair de celles correpondant à n impair.
On doit pour cela calculer la partie fractionnaire de $a(n)$ pour la substituer ensuite à κ.

```
> fraca:=proc(n) frac(a(n)) end:
> BS:=evalf(C0);prixBS:=plot([[n,BS]$n=n0..n1], style=line,colour=black):
> courbepaire:=plot(['[2*m,BS+evalf((1/(2*m))*eval(subs(kappa=fraca(2*m),C2)))]'
$m=n0/2..n1/2],style=line,colour=red):
> courbeimpaire:=plot(['[2*m+1,BS+evalf((1/(2*m+1))*eval(subs(kappa=fraca(2*m+1),C2)))]'
$m=n0/2..n1/2],style=line,colour=green):
> display({prixBS,courbepaire,C,courbeimpaire});
```

B Preuve du théorème

B.1 Un théorème technique

La formule (6) montre que la preuve du théorème fondamental (théorème 1) revient à l'étude de l'asymptotique de $\Phi(n, k(n), p(n))$ (et de $\Phi(n, k(n)), q(n)))$ pour tout modèle de Cox-Ross-Rubinstein satisfaisant les conditions (8)-(9). Cette preuve se ramène à celle d'un théorème technique (théorème 8). Voici comment :

Rappelons que $a(n)$ est défini par la relation (10)

$$a(n) := \frac{\ln(K/S_0) - n \ln d(n)}{\ln u(n) - \ln d(n)} \; ;$$

un calcul élémentaire montre que, comme par hypothèse (8) les développements (9) de $u(n)$ et $d(n)$ en puissances de $\varepsilon = 1/\sqrt{n}$ convergent, a admet un développement de Laurent en puissances de $1/\sqrt{n}$

$$a(n) = \frac{n}{2} + a_{-1}\sqrt{n} + \overline{\alpha}(1/\sqrt{n}), \tag{19}$$

où $\overline{\alpha}(\varepsilon)$ est une fonction analytique. Par définition (11), on a, puisque $\overline{\kappa}(n) := \{a(n)\}$,

$$\begin{aligned} k(n) &= a(n) + 1 - \{a(n)\} = \frac{n}{2} + a_{-1}\sqrt{n} + \overline{\alpha}(1/\sqrt{n}) + 1 - \overline{\kappa}(n) && (20)\\ &= \frac{n}{2} + a_{-1}\sqrt{n} + A(n, \overline{\kappa}(n)) && (21)\end{aligned}$$

où on a posé

$$A(n, \kappa) := \overline{\alpha}(1/\sqrt{n}) + 1 - \kappa. \tag{22}$$

Posons[3]

$$k(n, \kappa) := \frac{n}{2} + a_{-1}\sqrt{n} + A(n, \kappa), \tag{23}$$

où κ est un paramètre ; bien entendu $k(n, \overline{\kappa}(n)) = k(n)$.

Pour obtenir le développement à coefficients bornés souhaité, nous allons substituer à $k(n)$ la fonction à paramètre $k(n, \kappa)$ et traiter cette question en termes d'asymptotique à un paramètre κ, uniformément pour $\kappa \in \mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ compact ([16], *uniformly asymptotic series*). Il suffira ensuite de choisir $\mathcal{K} := [0, 1]$, un compact contenant toutes les valeurs $\overline{\kappa}(n)$. En substituant finalement $\overline{\kappa}(n)$ à κ, nous obtenons le développement à coefficients bornés annoncé.

[3] Nous nous permettons ici un abus, courant et bien maîtrisé en informatique, consistant à utiliser un même nom pour des fonctions différentes, dès lors qu'elles diffèrent également par le nombre de variables. Ainsi, par exemple, nous avons vu que le choix de $u(n)$ et $d(n)$ conduit à la définition de $\overline{\kappa}(n)$. Si f est une fonction des deux variables n et κ, nous définissons $f(n)$ (avec une seule variable) par $f(n) := f(n, \overline{\kappa}(n))$.

Notations : Introduisons le paramètre κ dans l'expression de l'intégrant, de l'intégrale, et du facteur de cette intégrale : pour tous $1 \leq k \leq n$, notons

$$\theta_{n,k}(y) := 2^{n-1}\sqrt{n}y^{k-1}(1-y)^{n-k}.$$

Toujours avec $k(n,\kappa)$ défini par (23) et $\overline{\kappa}(n) := \{a(n)\}$, posons

$$\begin{array}{rcll}
\theta(n,y,\kappa) & := & \theta_{n,k(n,\kappa)}(y), & \\
\theta(n,y) & := & \theta(n,y,\overline{\kappa}(n)). & \\
I^p(n,\kappa) & := & \displaystyle\int_0^{p(n)} \theta(n,y,\kappa)dy & \text{pour} \quad p(n) = \frac{1}{2} + p_1 n^{-\frac{1}{2}} + \ldots + p_{i_0} n^{-\frac{i_0}{2}} + o(n^{-\frac{i_0}{2}}) \ \text{, et} \\
I^p(n) & := & I^p(n,\overline{\kappa}(n)) & \text{et analogues pour } I^q(n,\kappa) \text{ et } I^q(n). \\
c(n,\kappa) & := & k(n,\kappa)\begin{pmatrix} n \\ k(n,\kappa)\end{pmatrix}\dfrac{2^{1-n}}{\sqrt{n}} \ \text{, et} & \\
c(n) & := & c(n,\overline{\kappa}(n)). &
\end{array}$$

Par le lemme 4, avec ces notations on a donc

$$\begin{array}{rcl}
\Phi(n,k(n),p(n)) & = & c(n)I^p(n) = c(n,\overline{\kappa}(n))I^p(n,\overline{\kappa}(n)) \\
\text{et } \Phi(n,k(n),q(n)) & = & c(n)I^q(n) = c(n,\overline{\kappa}(n))I^q(n,\overline{\kappa}(n)),
\end{array}$$

et par la proposition 5, on a

$$C(n) = S_0 c(n,\overline{\kappa}(n))I^q(n,\overline{\kappa}(n)) - Ke^{-rT}c(n,\overline{\kappa}(n))I^p(n,\overline{\kappa}(n)), \tag{24}$$

dont nous allons calculer l'asymptotique en calculant l'asymptotique uniforme en $\kappa \in \mathcal{K}$ de $c(n,\kappa)I^p(n,\kappa)$ (et analogue pour $c(n,\kappa)I^q(n,\kappa)$). Ceci se fait au moyen du théorème technique suivant, qui achève la preuve du théorème fondamental.

Théorème 8 (technique)

Supposons que $u(n)$ et $d(n)$ satisfassent les conditions (8)-(9). Alors, pour tout compact $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}$,

1. *le facteur $c(n,\kappa)$ admet un développement, uniforme en $\kappa \in \mathcal{K}$,*

$$c(n,\kappa) = c_0(\kappa) + \frac{c_1(\kappa)}{\sqrt{n}} + \frac{c_2(\kappa)}{n} + \ldots$$

dont les coefficients $c_i(\kappa)$ sont des fonctions polynômes de κ.

2. *l'intégrale $I^p(n,\kappa)$ admet un développement, uniforme en $\kappa \in \mathcal{K}$, $I^p(n,\kappa) = I^p_{i_0}(n,\kappa) + o(n^{-i_0/2})$ en puissances de $1/\sqrt{n}$, où le développement $I^p_{i_0}(n,\kappa)$ de $I^p(n,\kappa)$ tronqué à l'ordre i_0 peut s'obtenir de la manière suivante : soit*

$$\Theta(n,Y,\kappa) := \frac{1}{\sqrt{n}}\theta\left(n, \frac{1}{2} + \frac{Y}{\sqrt{n}}, \kappa\right)$$

l'intégrant obtenu par le changement de variables

$$y = \frac{1}{2} + \frac{Y}{\sqrt{n}}$$

dans $\int_0^{p(n)} \theta(n,y,\kappa)dy$. Soit $\Theta_{i_0}(n,Y,\kappa)$ son développement asymptotique en puissances de $1/\sqrt{n}$ tronqué à l'ordre i_0 ; il est de la forme

$$\Theta_{i_0}(n,Y,\kappa) = e^{-2Y^2+4a_{-1}Y}\sum_{i=0}^{i_0} d_i(Y,\kappa)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^i,$$

où les $d_i(Y,\kappa)$ sont des polynômes en Y et κ. Soit

$$Q_{i_0}(n,P,\kappa) := \int_{-\infty}^{P} \Theta_{i_0}(n,Y,\kappa)dY$$

la primitive nulle en $-\infty$ de ce développement de $\Theta(n,Y,\kappa)$ tronqué à l'ordre i_0 ; soit

$$P^n_{i_0} := p_1 + \frac{p_2}{n^{\frac{1}{2}}} + \ldots + \frac{p_{i_0+1}}{n^{i_0/2}}$$

le développement tronqué à l'ordre i_0 de $P := \sqrt{n}(p - \frac{1}{2})$. Soit $\hat{Q}_{i_0}(n,\kappa)$ le développement de $Q_{i_0}(n, P_{i_0}(n), \kappa)$ en puissances de $1/\sqrt{n}$, tronqué à l'ordre i_0. Le développement, uniforme en $\kappa \in \mathcal{K}$, $I^p_{i_0}(n,\kappa)$ en puissances de $1/\sqrt{n}$, tronqué à l'ordre i_0, de $I^p(n,\kappa)$ est donné par

$$I^p_{i_0}(n,\kappa) = \hat{Q}_{i_0}(n,\kappa). \tag{25}$$

B.2 Preuve du théorème technique : un peu d'asymptotique non-standard

Nous voulons calculer l'asymptotique de

$$\Phi(n,k(n),p(n)) = c(n,\overline{\kappa}(n)) I^p(n,\overline{\kappa}(n)),$$

B.2.1 Asymptotique du facteur $c(n,\kappa)$

La formule de Stirling donne immédiatement l'asymptotique du facteur $c(n,\kappa)$ indiquée, et est effective, par exemple à l'aide de `Maple` ; c'est l'intégrale $I^p(n)$ qui va nous occuper.

B.2.2 Asymptotique de l'intégrale $I^p(n,\kappa)$

La philosophie du calcul de l'asymptotique de $I^p(n,\kappa)$ est identique à celle de la méthode de Laplace, qui, elle, ne s'applique pas telle quelle ici. En effet, si nous écrivons l'intégrant θ sous sa forme dans (14)

$$\theta(n,y,\kappa) = e^{nh(y)}g,$$

nous voyons qu'ici la borne d'intégration p n'est pas constante, mais dépend de n, et surtout tend vers l'extremum $y_0 = \frac{1}{2}$ de la fonction h. Qui plus est, ici la fonction g ne dépend pas seulement de y, mais aussi de n et κ. Tout ceci rend nécessaire de reparcourir tout le fondement de la methode de Laplace et de montrer qu'elle s'adapte encore à la situation présente.

La première étape consiste à montrer que l'on peut, sans modifier le développement asymptotique, réduire l'intervalle d'intégration $[0, p(n)]$ à un intervalle $[y^-(n), p(n)]$ bien choisi, qui tend vers $\{1/2\}$. Cette étape est nécessaire à la logique de la preuve, sans qu'il soit necessaire qu'elle soit effective : on montre ultérieurement que dès lors qu'on est assuré de la forme du développement, son expression précise peut être calculée “naïvement”.

Cette étape nous conduit à utiliser le langage des ordres de grandeur de l'*analyse non standard*, que le lecteur non-spécialiste est invité à interpréter en termes heuristiques. Nous renvoyons à ([7]) pour permettre une lecture en toute rigueur de la preuve ci-dessous. L'apport de cette méthode sera utile dans la réduction de la preuve aux lemmes 9 et 10.

Sans perte de généralité, nous pouvons par transfert supposer que les données du problème, à savoir les réels S_0 et K sont standard, de même que les fonctions u, et d. Par transfert, les fonctions p, q, k, et $\overline{\kappa}$ sont donc standard, ainsi que le nombre a_{-1}, puisque ces objets sont définis de manière classique à partir de S_0, K, u, et d. Comme la fonction $\overline{\kappa}$ est standard bornée, sa valeur absolue est majorée par un standard ; elle ne prend donc que des valeurs limitées, et $\mathcal{K}$ peut être choisi standard donc à éléments tous limités.

A présent, *soit n^* i-grand quelconque fixé*, ce qui fixe une valeur pour les fonctions u, d, p, q, k, et $\overline{\alpha}$. Nous notons p^* la valeur $p(n^*)$, et définissons de même q^*, k^*, et κ^*. S'agissant de valeurs en un point non-standard de fonctions standard, les *nombres* p^*, q^*, k^*, et κ^* sont donc (généralement) non-standard. Toutefois, nous venons de montrer que κ^* et tous les $\kappa \in \mathcal{K}$ sont limités. Nous posons

$$\varepsilon := \frac{1}{\sqrt{n^*}},$$

qui est donc un réel strictement positif i-petit. Nous utilisons la notation

$$\varepsilon^{\not\infty}$$

pour désigner une quantité de développement en ε-ombres nul[4].

[4]Nous utilisons les symboles de Van den Berg [3] : $\oslash$ désigne un réel i-petit, £ un réel limité (c'est-à-dire non i-grand), @ un réel positif appréciable (c'est-à-dire ni i-petit ni i-grand), deux occurences d'un de ces symboles ne représentant généralement pas des réels égaux ; on trouvera dans [6] la définition d'un développement en ε-ombres d'un nombre r, la version non-standard d'un développement asymptotique en série de puissances de ε d'une fonction standard $f(\varepsilon)$.

La proposition 2 implique que, pour tout i_0 standard, on a $p^* = \frac{1}{2} + p_1\varepsilon + \ldots + (p_{i_0+1} + \not\!\phi)\varepsilon^{i_0+1}$ et $q^* = \frac{1}{2} + q_1\varepsilon + \ldots + (q_{i_0+1} + \not\!\phi)\varepsilon^{i_0+1}$, où les p_i et les q_i sont tous standard. Posons

$$\theta^*(y,\kappa) := \theta(n^*, y, \kappa).$$

Lemme 9 *Il existe un réel* $y_- \in [0, p^*] \cap [0, \frac{1}{2}[$, *avec* $y_- \simeq \frac{1}{2}$ *et* $e^{-Y_-^2} = \varepsilon^{\not\infty}$ *où* $Y_- := \frac{1}{\varepsilon}(y_- - \frac{1}{2})$, *tel que pour tout* $\kappa \in \mathcal{K}$

$$I^{*p}(\kappa) := I^{p^*}(n^*, \kappa) := \int_0^{p^*} \theta^*(y,\kappa)dy = \int_{y_-}^{p^*} \theta^*(y,\kappa)dy + \varepsilon^{\not\infty} =: \tilde{I}^{*p}(\kappa) + \varepsilon^{\not\infty}, \tag{26}$$

et donc, en particulier, $Y_- < 0$ *est i-grand.*

Preuve : Observons tout d'abord que,

$$\forall y^- \in [0, p^*] \quad y^- \not\simeq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \forall y \in [0, y^-] \ \forall \kappa \in \mathcal{K} \ \ 0 \le \theta^*(y,\kappa) \le \varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} \tag{27}$$

En effet, soit z tel que $y = \frac{1}{2} - z$; donc $0 \lneqq z \le \frac{1}{2}$, et $y \simeq \frac{1}{2}$ si et seulement si $z \simeq 0$. On a

$$\begin{aligned} \theta^*(y,\kappa) &= \frac{2^{n^*-1}}{\varepsilon} y^{k(n^*,\kappa)-1}(1-y)^{n^*-k(n^*,\kappa)} \\ &= \frac{2^{n^*-1}}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2} - z\right)^{\frac{n^*}{2} + l\sqrt{n^*}} \left(\frac{1}{2} + z\right)^{\frac{n^*}{2} - l\sqrt{n^*}} \frac{2}{1+2z} = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon^2}\varphi(z)}, \end{aligned}$$

où $l := a_{-1} + \varepsilon(\overline{\alpha}(\varepsilon) - \kappa)$ est limité et

$$\varphi(z) := \ln \frac{1}{\sqrt{1-4z^2}} - \varepsilon l \ln \frac{1-2z}{1+2z} - \varepsilon^2 \ln \frac{1}{1+2z}$$

est une fonction dont il est facile de voir que pour les z considérés tels que $z \not\simeq 0$ on a $\varphi(z) > 0$ et $\varphi(z) \not\simeq 0$. Donc, trivialement, $\frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon^2}\varphi(z)} < \varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}}$, d'où (27).

A présent, en appliquant le principe de permanence de Cauchy ([7]) à la propriété externe $y^- \not\simeq \frac{1}{2}$ de (27), on a

$$\exists y^- \in [0, p^*] \quad y^- \simeq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall y \in [0, y^-] \ \forall \kappa \in \mathcal{K} \ \ 0 \le \theta(y) \le \varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} \tag{28}$$

Nous devons nous assurer, qu'en outre, pour $Y_- := \frac{1}{\varepsilon}(y_- - \frac{1}{2})$ on a $e^{-Y_-^2} = \varepsilon^{\not\infty}$, ce qui est bien le cas quitte à remplacer y_- par Min $\left\{y_-, \frac{1}{2} - \varepsilon^{\frac{2}{3}}\right\}$. Le lemme découle de ce que $\int_0^{y_-} \varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} dy = y_- \varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon^{\omega}$, pour un $\omega \simeq \frac{1}{\varepsilon}$, donc i-grand positif. □

B.3 Fin de la preuve du théorème technique

Choisissons y_- et Y_- comme dans le lemme 9. Dans (26) nous avons utilisé la notation

$$\tilde{I}^{*p}(\kappa) := \int_{y_-}^{p^*} \theta^*(y,\kappa)dy.$$

Le lemme 9 assure précisément que $\tilde{I}^{*p}$ a même développement en ε-ombres que I^{*p}. Sur le domaine $[y_-, p^*]$ de l'intégrale définissant $\tilde{I}^{*p}$, la méthode de Laplace peut-être appliquée, une fois convenablement adaptée. Elle consiste essentiellement à transformer la perturbation singulière (terme en $\frac{1}{\varepsilon^2}$ contenu dans θ^*) en un noyau d'intégration gaussien au moyen de la loupe (changement de variable comportant un changement d'échelle)

$$y = \frac{1}{2} + \varepsilon Y,$$

qui, notamment, change le domaine $[y_-, p^*]$ en $[Y_-, P]$, avec

$$P := \frac{1}{\varepsilon}\left(p - \frac{1}{2}\right) = p_1 + p_2\varepsilon + \ldots + p_{i_0+1}\varepsilon^{i_0} + \not\!\phi\varepsilon^{i_0} =: P_{i_0} + \not\!\phi\varepsilon^{i_0} \quad , \text{où}$$

$$P_{i_0} := p_1 + p_2\varepsilon + \ldots + p_{i_0+1}\varepsilon^{i_0}.$$

On obtient ainsi

$$\tilde{I}^{*p}(\kappa) = \int_{Y_-}^{P} \Theta^*(Y,\kappa)dY \quad \text{, avec}$$

$$\begin{aligned}\Theta^*(Y,\kappa) &:= e^{\frac{1}{\varepsilon^2}\ln(1-4\varepsilon^2Y^2)} e^{\frac{a-1}{\varepsilon}\ln\frac{1+2\varepsilon Y}{1-2\varepsilon Y}} e^{(\overline{\alpha}(\varepsilon)-\kappa)\ln\frac{1+2\varepsilon Y}{1-2\varepsilon Y}} \frac{1}{1+2\varepsilon Y} \\ &=: H(Y)D(Y,\kappa) \quad \text{, avec}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H(Y) &:= e^{-2Y^2+4a_{-1}Y} \quad \text{, et} \\ D(Y,\kappa) &:= \Theta^*(Y,\kappa)/H(Y) = e^{\frac{1}{\varepsilon^2}(4\varepsilon^2Y^2+\ln(1-4\varepsilon^2Y^2))} e^{\frac{a-1}{\varepsilon}(-4\varepsilon Y+\ln\frac{1+2\varepsilon Y}{1-2\varepsilon Y})} e^{(\overline{\alpha}(\varepsilon)-\kappa)\ln\frac{1+2\varepsilon Y}{1-2\varepsilon Y}} \frac{1}{1+2\varepsilon Y}.\end{aligned}$$

Pour $y \in [y_-, p^*]$, on a $\varepsilon Y \simeq 0$; comme par ailleurs κ est limité, nous pouvons donc calculer un développement de Taylor par rapport à $\xi := \varepsilon Y$ des fonctions élémentaires qui interviennent dans l'expression ci-dessus. De par notre choix de la fonction H les termes de perturbation singulière (c'est-à-dire en $1/\varepsilon^2$ et en $1/\varepsilon$) s'éliminent et nous obtenons que, pour tout i_0 standard,

$$D(Y,\kappa) = \sum_{i=0}^{i_0} d_i(Y,\kappa)\varepsilon^i + \varepsilon^{i_0}\delta_{i_0}(Y,\kappa), \tag{29}$$

avec $\delta_{i_0}(Y,\kappa) \simeq 0$ pour tout $Y \in [Y_-, P]$ et tout $\kappa \in \mathcal{K}$, et où les fonctions d_i sont des polynômes standard. Le degré de d_i par rapport à Y est $2i$ si i est pair et $2i-1$ sinon, et son degré par rapport à κ est i. Pour tout $E \in \mathbb{R}$, et pas seulement $E = \varepsilon = 1/\sqrt{n^*}$ comme jusqu'ici, posons

$$D_{i_0}(Y,\kappa,E) := \sum_{i=0}^{i_0} d_i(Y,\kappa)E^i \ ;$$

c'est un polynôme, standard dès lors que i_0 est standard, en Y, κ, et E. Observons que l'identité (29) implique que

$$\begin{aligned}\Theta^*(Y,\kappa) &= H(Y)D_{i_0}(Y,\kappa,\varepsilon) + \varepsilon^{i_0}H(Y)\delta_{i_0}(Y,\kappa) && (30) \\ &= \sum_{i=0}^{i_0} H(Y)d_i(Y,\kappa)\varepsilon^i + \varepsilon^{i_0}\gamma_{i_0}(Y,\kappa), && (31)\end{aligned}$$

avec $\gamma_{i_0}(Y,\kappa) := H(Y)\delta_{i_0}(Y,\kappa)$; on vérifie facilement que comme κ est limité, et comme $\delta_{i_0}(.,\kappa)$ est i-petit dans $\mathcal{L}^\infty_{[Y_-,P]}$, on a $\gamma_{i_0}(.,\kappa) \simeq 0$ *tant dans* $\mathcal{L}^\infty_{[Y_-,P]}$ *que dans* $\mathcal{L}^1_{[Y_-,P]}$.

A noter que, pour tout $Y \in [Y_-, P]$ et tout $\kappa \in \mathcal{K}$, on a

$$\Theta^*(Y,\kappa) = \sum_{i=0}^{i_0} H(Y)d_i(Y,\kappa)\varepsilon^i + \varepsilon^{i_0}\phi,$$

donc $\sum_{i=0}^{i_0} H(Y)d_i(Y,\kappa)\varepsilon^i$ est un développement en ε-ombres de $\Theta^*(Y,\kappa)$, uniformément en $\kappa \in \mathcal{K}$, et donc

$$\sum_{i=0}^{i_0} H(Y)d_i(Y,\kappa)\varepsilon^i =: \Theta_{i_0}(n^*,Y,\kappa), \tag{32}$$

où $\Theta_{i_0}(n,Y,\kappa)$ désigne, comme dans l'énoncé du théorème, le développement asymptotique en série de puissances de $1/\sqrt{n}$ de $\Theta(n,Y,\kappa)$, tronqué à l'ordre i_0.

Lemme 10 *Avec Y_- tel que $e^{-Y_-^2} = \varepsilon^{\not\infty}$, on a, pour tout i_0 standard, et κ limité,*

$$\int_{-\infty}^{Y_-} \Theta_{i_0}(n^*,Y,\kappa) = \varepsilon^{\not\infty}. \tag{33}$$

Preuve : On a
$$\left|\int_{-\infty}^{Y_-}\Theta_{i_0}(n^*,Y,\kappa)\right|\leq\sum_{i=0}^{i_0}\varepsilon^i\left|\int_{-\infty}^{Y_-}H(Y)d_i(Y,\kappa)dY\right|\leq\sum_{i=0}^{i_0}\varepsilon^i e^{-Y_-^2}\int_{-\infty}^{Y_-}e^{-Y_-^2+4a_{-1}Y}\left|d_i(Y,\kappa)\right|dY.$$

Or, comme κ est limité, il possède une partie standard κ_0 ; on a, pour tout $i\leq i_0$ standard,
$$d_i(Y,\kappa)=d_i(Y,\kappa_0)+\Delta_i(Y),$$
où Δ_i est un polynôme de degré standard à coefficients i-petits ; comme pour tout s standard $Y^s e^{-Y_-^2+4k_1Y}$ est une fonction standard intégrable, on en déduit que $\int_{-\infty}^{Y_-}e^{-Y_-^2+4k_1Y}\left|d_i(Y,\kappa)\right|dY$ est i-petit, puisque $Y_-\leq 0$ est i-grand. Comme on a $e^{-Y_-^2}=\varepsilon^{\not\infty}$, on a bien (33). □

A présent, comme $\Theta(.,\kappa)=\sum_{i=0}^{i_0}H(.)d_i(.,\kappa)\varepsilon^i+\varepsilon^{i_0}\gamma_{i_0}(.,\kappa)$, avec $\gamma(.,\kappa)\simeq 0$ dans $\mathcal{L}^1_{[Y_-,P]}$, on a, dans $\mathcal{L}^1_{[Y_-,P]}$ et pour tout κ limité,
$$\begin{array}{rcll}
\tilde{I}^{*p}(\kappa) & := & \displaystyle\int_{[Y_-,P]}\Theta^*(.,\kappa) & \\
 & = & \displaystyle\int_{[Y_-,P]}\Theta_{i_0}(n^*,.,\kappa)+\varepsilon^{i_0}\int_{[Y_-,P]}\gamma(.,\kappa) & \text{, par (31) et (32)}\\
 & = & \displaystyle\int_{]-\infty,P]}\Theta_{i_0}(n^*,.,\kappa)-\int_{]-\infty,Y_-]}\Theta_{i_0}(n^*,.,\kappa)+\varepsilon^{i_0}\phi & \\
 & = & \displaystyle\int_{]-\infty,P]}\Theta_{i_0}(n^*,.,\kappa)-\varepsilon^{\not\infty}+\varepsilon^{i_0}\phi & \text{par (33)}\\
 & = & \displaystyle\int_{]-\infty,P]}\Theta_{i_0}(n^*,.,\kappa)+\varepsilon^{i_0}\phi & \text{puisque } \varepsilon^{i_0}\phi+\varepsilon^{\not\infty}=\varepsilon^{i_0}\phi\\
 & = & Q(n^*,P,\kappa)+\varepsilon^{i_0}\phi & \text{par définition de } Q(n,P,\kappa)\\
 & = & \hat{Q}_{i_0}(n^*,\kappa)+\varepsilon^{i_0}\phi+\varepsilon^{i_0}\phi & \text{par définition de } \hat{Q}_{i_0}(n,\kappa)\\
 & = & \hat{Q}_{i_0}(n^*,\kappa)+\varepsilon^{i_0}\phi & \text{puisque } \varepsilon^{i_0}\phi+\varepsilon^{i_0}\phi=\varepsilon^{i_0}\phi.
\end{array}$$
et donc, par le lemme 9, pour tout $\kappa\in\mathcal{K}$ donc limité,
$$I^{*p}(\kappa):=\tilde{I}^{*p}(\kappa)+\varepsilon^{\not\infty}=\hat{Q}_{i_0}(n^*,\kappa)+\varepsilon^{i_0}\phi+\varepsilon^{\not\infty}=\hat{Q}_{i_0}(n^*,\kappa)+\varepsilon^{i_0}\phi,$$
qui, comme n^* est i-grand arbitraire, est précisément la version non-standard de (25), ce qui achève la preuve du théorème technique.

Références

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook for mathematical functions.* Dover publications Inc. New-York, 1965.

[2] I. v. d. Berg. *Principles of infinitesimal stochastic and financial analysis.* World Scientific, 2000.

[3] I. v. d. Berg and F. Koudjeti. Neutrices, external numbers, and external calculus. In F. Diener and M. Diener, editors, *Nonstandard Analysis in Practice*, chapter 7, pages 145–170. Springer Universitext, 1995.

[4] P. Boyle. Option valuating using a three jumpt process. *International Options Journal*, 3 :7–12, 1986.

[5] J. Cox and M. Rubinstein. *Options markets.* Prentice-Hall, 1985.

[6] F. Diener. Développements en ε-ombres. In I. D. Landau, editor, *Outils et modèles mathématiques pour l'automatique, l'analyse des systèmes et le traitement du signal, tome 3*, pages 315–328. Editions du CNRS, 1983.

[7] F. Diener and M. Diener. Tutorial. In *Nonstandard Analysis in Practice*, chapter 1, pages 1–21. Springer Universitext, 1995.

[8] F. Diener and M. Diener. Cox-Ross-Rubinstein formula for option pricing. In A. Sulem, editor, *Ecole CEA, EDF, INRIA mathématiques financières : modèles économiques et mathématiques des produits dérivés.* Inria, 1999.

[9] E. Gobet. Analysis of the zigzag convergence for barrier options with binomial trees. Prépublication 536, UMR 7599 Cnrs-Universités Paris 6 et Paris 7, http ://www.proba.jussieu.fr/mathdoc/preprints/index.html, octobre 1999.

[10] S. Heston and G. Zhou. On the rate of convergence of discrete-time contingent claims. *Math. Finance*, 10(1) :53–75, 2000.

[11] E. Hilliard and A. Schwartz. Binomial option pricing under stochastic volatility and correlated state variables. *The Journal of Derivatives*, pages 23–39, 1996.

[12] D. Lamberton. Vitesse de convergence pour des approximations de type binômial. In A. Sulem, editor, *Ecole CEA, EDF, INRIA mathématiques financières : modèles économiques et mathématiques des produits dérivés*, pages 347–359. Inria, 1999.

[13] D. Leisen and M. Reimer. Binomial models for option valuation – examining and improving convergence. *Applied Mathematical Finance*, 3 :319–346, 1996.

[14] M. Musiela and M. Rutkowski. *Martingale methods in Financial modelling*, volume 36 of *Applications of mathematics*. Springer, 1997.

[15] D. Talay and L. Tubaro. Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations. *Stochastic analysis and applications*, 8(4) :483–509, 1990.

[16] W. Wasow. *Asymptotic Expansions for Ordinay Differential Equations*. Interscience Publisher, New York, 1965.