Table des matières

Chapitre 1

Prix et couverture d'une option d'achat

Dans cette première leçon, on explique comment on peut calculer le prix d'un contrat d'option en évaluant celui d'un portefeuille de couverture de cette option. On se place dans un cas très simple, celui d'une option d'achat sur un actif financier dont on a modélisé la dynamique au moyen d'un arbre binaire. Le taux d'intérêt monétaire est supposé constant pendant la durée du contrat.

Définition : Une *option* d'achat (européenne), *encore appelée call*, est un titre donnant droit à son détenteur d'acheter un actif financier à une date future et à un prix fixé. Il s'agit d'un droit et non d'une obligation. Le prix fixé s'appelle le *prix d'exercice* de l'option et la date de fin du contrat la *date d'échéance* ou *date d'exercice*. L'actif financier sur lequel porte le contrat s'appelle l'*actif sous-jacent*.

Le propre d'un contrat d'option, tient à ce qu'à la date de souscription, la valeur à l'échéance de l'actif sous-jacent n'est pas connue mais le paiment que pourra exiger le détenteur de l'option, s'il exerce l'option, dépend de cette valeur à l'écheance. C'est pourquoi on appelle aussi les options des *contrats contingents*. On peut comprendre, dans un premier temps, un tel contrat comme un contrat d'assurance : le vendeur de l'option est l'assureur, l'acheteur l'assuré, ce dernier cherchant à se couvrir contre une envolée de la valeur du sous-jacent. Il s'agit alors d'un contrat de transfert de risque moyennant un prix. Mais nous verrons plus loin qu'il y a une différence essentielle entre un contrat d'assurance classique (assurance habitation ou automobile) et un contrat d'option.

L'exemple le plus naturel d'actif financier est sans doute celui d'une action cotée en bourse, comme l'action Micsft ou Netscp sur le NASDAQ ou AmOnLne sur le NYSE. Mais cela peut aussi être le cours d'une matière première comme le prix d'une tonne de zing ou celui d'un produit agricole tel le prix de 50.000 livres de boeuf. Les premiers contrats d'option étaient des contrats sur cours agricoles déjà courants au siècle dernier. Les contrats d'option sur actions se sont vraiment développés lorsqu'ils ont pu faire l'objet d'une négociation en bourse, c'est-à-dire à partir des années 70 sur le CBOT, à Chicago, puis progressivement dans la plupart des autres places financières.

1.1 Evaluation du prix dans un modèle à une étape

Pour évaluer le prix d'une option d'achat à l'instant initial, c'est-à-dire la somme à verser par l'acheteur au vendeur, plaçons nous tout d'abord dans un cas très simple. Notons $t = 0$ l'instant de souscription de l'option, $t = T$ son échéance et K son prix d'exercice. Supposons que l'actif sous-jacent ait la valeur S_0 à l'instant initial et qu'il ne puisse prendre que deux valeurs $S_T = S_0u$ ou $S_T = S_0d$ à l'échéance, avec $0 < d < 1 < u$. On verra qu'il est naturel de supposer en outre que $S_0d < K < S_0u$. Soit C_0 la valeur, à déterminer, du call à l'instant $t = 0$; c'est le prix du contrat, ou la *prime*. A l'instant initial le vendeur ne sait pas si S_T prendra la valeur S_0u ou S_0d, mais il peut évaluer ce qu'il devra à l'acheteur dans chacun des deux cas : si $S_T = S_0d$, l'acheteur n'exercera pas (puisqu'il peut alors acheter l'actif sous-jacent sur le marché à un prix inférieur à K) et donc la valeur de l'option est nulle ; par contre si $S_T = S_0u$, l'acheteur réclamera au vendeur la différence entre le prix de marché et le prix convenu K, soit $S_0u - K$, somme lui permettant d'effectuer son achat à ce prix. Comment le vendeur peut-il, avec la prime qu'il a reçue, faire face à ses engagements ? L'idée est d'utiliser la prime pour constituer un portefeuille, appelé *portefeuille de couverture* Π, composé de a actifs S_0 et de b unités monétaires, et de choisir sa composition a et b de telle façon que sa valeur à l'échéance soit précisément celle de l'option, c'est-à-dire 0 si $S_T = S_0 d$ et $S_0 u - K$ si $S_T = S_0 u$. . Si l'on désigne par r le taux d'intérêt monétaire, la *composition du portefeuille* (a, b) devra donc vérifier les deux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} aS_0 u + be^{rT} & = & S_0 u - K \\ aS_0 d + be^{rT} & = & 0 \end{array} \right. \tag{1.1}$$

On résout facilement ce système (système linéaire de deux équations à deux inconnues a et b) et on déduit des valeurs de a et b obtenues la valeur du portefeuille à l'instant initial $\Pi_0 = aS_0 + b$. On peut alors donner à C_0 la valeur $C_0 = \Pi_0$.

Exemple : Par exemple, si $S_0 = 120$, $u = 1,5$, $u = 0,5$, $r = 0$, et $K = 80$, la résolution du système (1.1) donne $a = \frac{5}{6}$, $b = -50$ et donc $\Pi_0 = 50$. Cela signifie que, ayant touché la prime fixée à $C_0 = 50$, le vendeur emprunte 50 (car $b = -50$) et achète $a = \frac{5}{6}$ de S_0 (au prix 100) ; à l'échéance, son portefeuille vaudra soit $150 = \frac{5}{6}180$, si $S_T = S_0 u$, et il paiera alors $100 = 180 - 80$ au détenteur du call et remboursera les 50 empruntés (sans interêts puisqu'on a supposé $r = 0$), soit il vaudra $50 = \frac{5}{6}60$, si $S_T = S_0 d$, ce qui, compte tenu du fait que le détenteur du call ne viendra pas l'exercer, lui permet de rembourser les 50 empruntés.

Remarque : Notons que pour que le problème admette une solution, il suffit que le système (1.1) admette une solution, ce qui est assuré dès que $u \neq d$, ce qui est précisément l'origine du sens du contrat : si l'actif sous-jacent n'avait qu'un seul prix à $t = T$, il n'y aurait pas besoin de souscrire d'option !

Remarque : Le raisonnement précédent se généralise facilement à d'autres contrats d'option ; par exemple pour un contrat d'option qui donne le droit de vendre au prix K (au lieu du droit d'acheter), appelé un *put*, sa valeur à l'échéance sera $K - S_0 d$ si $S_T = S_0 d$ et 0 si $S_T = S_0 u$. Plus généralement, si l'on désigne par $C_T = \varphi(S_T)$ le prix du contrat d'option à l'instant T, la résolution du système (1.1) dans ce cas montre que la composition du portefeuille en actif sous-jacent sera donnée par

$$a = \frac{\varphi(S_0 u) - \varphi(S_0 d)}{S_0 u - S_0 d} \tag{1.2}$$

Les praticiens désignent ce quotient sous le nom de *delta de couverture* (ou simplement *delta*). Il désigne la quantité d'actifs sous-jacent qu'il faut avoir dans son portefeuille si l'on veut couvrir l'option.

1.2 Modèle à deux étapes : couverture dynamique.

La seule idée du portefeuille de couverture (a, b) constitué à l'instant initial ne suffit plus si l'option peut prendre trois valeurs à l'échéance (parce que l'actif sous-jacent en prendrait trois). Par contre, si l'on ajoute la possibilité de modifier, à une date intermédiaire (entre $t = 0$ et $t = T$) la composition du portefeuille constitué à la date initiale, en tenant compte de la valeur S_t du sous-jacent à cette date, on peut trouver une solution à ce problème : c'est l'idée de la couverture dynamique.

Considérons un modèle à deux étapes de l'actif sous-jacent : $t \in \{0, \delta t, 2\delta t = T\}$ et (S_t) prenant la valeur S_0 à l'instant initial, l'une des deux valeurs $S_{\delta t} = S_0 d$ ou $S_{\delta t} = S_0 u$ à l'instant intermédiaire $t = \delta t$ et l'une des trois valeurs $S_T = S_0 d^2$, $S_T = S_0 ud$ ou $S_T = S_0 u^2$ à l'échéance. Pour déterminer la valeur d'un portefeuille de couverture d'une option $C_T = \varphi(S_T)$, raisonnons en partant de sa valeur Π_T à l'échéance, qui est connue puisque, pour *couvrir* l'option il devra valoir $\Pi_T = \varphi(S_T)$, somme due en $t = T$ par le vendeur à l'acheteur de l'option. Il y a trois possibilités pour cette valeur, selon les valeurs prises par S_T. En utilisant la même méthode que dans le cas d'un modèle à une étape, on peut calculer les deux valeurs $\Pi_{\delta t} = a_{\delta t} S_{\delta t} + b_{\delta t}$ que devra prendre le portefeuille à l'instant $t = \delta t$, selon que $S_{\delta t} = S_0 d$ ou $S_{\delta t} = S_0 u$. Pour cela, il suffit de résoudre les deux systèmes

$$\left\{ \begin{array}{lcl} aS_0 u^2 + be^{r\delta t} & = & \varphi(S_0 u^2) \\ aS_0 ud + be^{r\delta t} & = & \varphi(S_0 ud) \end{array} \right. \tag{1.3}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} aS_0 ud + be^{r\delta t} & = & \varphi(S_0 ud) \\ aS_0 d^2 + be^{r\delta t} & = & \varphi(S_0 d^2) \end{array} \right. \tag{1.4}$$

Désignons par $\Pi^u_{\delta t}$ et $\Pi^d_{\delta t}$ les deux valeurs de $\Pi_{\delta t} = a_{\delta t} S_{\delta t} + b_{\delta t}$ obtenues en remplaçant d'une part $(a_{\delta t}, b_{\delta t})$ par la solution du système (1.3) et $S_{\delta t}$ par $S_0 u$ et d'autre part $(a_{\delta t}, b_{\delta t})$ par la solution du

Figure 1.1: Deux pattes-d'oie : la première repésente l'évolution sur deux étapes d'un actif à dynamique stochastique binaire, avec $S_0 = 80$ et $S_{t+\delta t} = S_t(1 \pm 0.5)$; la seconde celle du portefeuille de couverture d'un call sur cet actif de prix d'exercice $K = 80$.

système (1.4) et $S_{\delta t}$ par $S_0 d$. Pour obtenir la valeur cherchée du portefeuille à l'instant initial, qui sera comme précédemment la valeur initiale de l'option (ou prime), il reste alors simplement à résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} aS_0 u + b e^{r\delta t} & = & \Pi^u_{\delta t} \\ aS_0 d + b e^{r\delta t} & = & \Pi^d_{\delta t} \end{array} \right. \tag{1.5}$$

Exemple : Soit un titre valant $S_0 = 80$ et changeant deux fois de prix avant l'échéance en $T = 2\delta t$. Observons que dans l'exemple précédent nous avions, à $t = \delta t$, $S_{\delta t} = S_0(1 + \frac{1}{2})$ ou $S_{\delta t} = S_0(1 - \frac{1}{2})$. Supposons qu'ici S suive un processus analogue :

$$S_{\delta t} = S_0(1 \pm \tfrac{1}{2}) \ , \ S_{2\delta t} = S_{\delta t}(1 \pm \tfrac{1}{2}).$$

Cela donne pour cet actif la dynamique indiquée figure 1.2 :

$$S_0 = 80 \quad \text{devient} \quad S_{\delta t} = 120 \text{ ou } S_{\delta t} = 40 \tag{1.6}$$

$$S_0 = 120 \quad \text{devient} \quad S_{2\delta t} = 180 \text{ ou } S_{2\delta t} = 60 \tag{1.7}$$

$$S_0 = 40 \quad \text{devient} \quad S_{2\delta t} = 60 \text{ ou } S_{2\delta t} = 20 \tag{1.8}$$

Soit une option call de date d'exercice $T = 2\delta t$ et prix d'exercice $K = 80$ (lorsque $K = S_0$, on dit que c'est une option “à la monnaie”). On suppose, pour simplifier, que le taux d'intéret monétaire r est ici égal à 0.

Observons que si $S_{\delta t} = 120$ nous retrouvons l'exemple précédent et comprenons que le portefeuille de couverture, dans ce cas (c'est-à-dire si $S_{\delta t} = 120$), doit valoir

$$\Pi^u_{\delta t} = 50.$$

Qu'en est-il si $S_{\delta t} = 40$? Inutile de faire des calculs : les deux seules possibilité à venir pour $S_{2\delta t}$ sont 60 ou 20. Comme ces deux valeurs sont inférieures au prix d'exercice $K = 80$, on aura dans les deux cas $\varphi(S_{2\delta t}) = 0$, et donc $a_{\delta t} = b_{\delta t} = \Pi_{\delta t} = 0$ puisqu'il n'y a plus rien à couvrir dans ce cas.

A l'instant $t = 0$ le portefeuille de couverture (a_0, b_0) doit satisfaire $a_0 S_{\delta t} + b_0 = \Pi_{\delta t}$, c'est-à-dire vérifier le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_0 120 + b_0 & = & a_0 S_0 u + b_0 = 50 \\ a_0 60 + b_0 & = & a_0 S_0 d + b_0 = 0 \end{array} \right. \tag{1.9}$$

On trouve immédiatement $a_0 = \frac{5}{8}$ et $b_0 = -25$ d'où $\Pi_0 = \frac{5}{8}80 - 25 = 25$. Le vendeur de l'option, dont le prix est $\Pi_0 = 25$, touche cette prime à l'instant initial, y ajoute un montant de 25 qu'il emprunte, le tout servant à acheter $\frac{5}{8}$ d'actifs à 80 pièce. Si, pour $t = \delta t$, l'actif sous-jacent a évolué à la baisse et que $S_{\delta t} = 40$, *on solde* le portefeuille ; la part en actifs ne vaut plus que $a_0 S_{\delta t} = \frac{5}{8}40 = 25$, soit exactement de quoi rembourser la dette $b_0 = 25$. Si, pour $t = \delta t$, l'actif sous-jacent a évolué à la hausse et que $S_{\delta t} = 120$, nous avons vu dans l'exemple précédent que le portefeuille doit à présent comporter $a_{\delta t} = \frac{5}{6}$; comme il y a déjà $\frac{5}{8}$ d'actifs dans le portefeuille, il convient d'en *racheter* $\frac{5}{6} - \frac{5}{8} = \frac{10}{48}$ au prix

Figure 1.2: Fonction de paiement (ou pay-off) d'un call et d'un put : l'option call est l'option qui assure à son détenteur de pouvoir *acheter*, à la date d'échéance T, l'actif S à un prix maximal K. Si $S_T \leq K$, l'option aura donc une valeur nulle pour $t = T$. Si $S_T > K$, l'option vaudra $S_T - K$ pour $t = T$, c'est-à-dire la différence entre le prix maximal convenu K et le prix effectif S_T de l'actif à la date T. Pour une option call, on a donc $\varphi_{Call}(s) = (s - K)^+$, où x^+ vaut x si $x > 0$ et 0 sinon. L'option put assure à son détenteur de pouvoir *vendre*, à la date T, l'actif S au prix minimum K. En examinant successivement les cas $S_T \geq K$ et $S_T < K$, il est facile de voir que $\varphi_{Put}(s) = (K - s)^+$. Le nombre K s'appelle le *prix d'exercice* (ou *strike*) de l'option.

unitaire $S_{\delta t} = 120$, donc pour une valeur de $\frac{10}{48}120 = 25$, que l'on emprunte, ce qui porte la dette totale à $25 + 25 = 50$, comme dans le premier exemple, bien entendu. Le vendeu a ainsi modifié la composition de son portefeuille de couverture (sans changer sa valeur) de telle sorte qu'à l'échéance sa valeur soit exactement celle de l'option (100, 0, ou 0 selon les valeurs de $S_{2\delta t}$) : c'est le principe de la couverture dynamique.

Remarque : On peut à présent comprendre pourquoi le méchanisme de couverture dynamique d'une option décrit dans cette leçon est fondamentalement différent de celui qui permet à un assureur de couvrir un risque de vol ou d'incendie : dans le cas d'une option, le vendeur peut (à supposer que le modèle mathématique qu'il a de la dynamique de l'actif sous-jacent soit réaliste) couvrir le risque d'un seul contrat, et même le couvrir exactement, c'est-a-dire le faire disparaître. Dans le cas d'une assurance classique au contraire, l'assureur doit avoir vendu de nombreux contrats pour, en moyenne, pouvoir faire fasse à ses obligations, comptant sur le fait que la probabilité pour qu'un trop grand nombre de clients aient un sinistre simultanement est suffisamment faible : c'est une couverture du risque par diversification.

Une question naturelle que cette remarque peut susciter est la suivante : si le vendeur d'une option peut, grace à la couverture dynamique, supprimer le risque, pourquoi l'acheteur ne couvre-t-il pas lui-même ce risque ? Quand au vendeur, s'il ne gagne rien à le faire, pourquoi le fait-il ? La réponse est que, dans la pratique, la couverture dynamique nécessitant un travail au jour le jour de surveillance des cours et d'ajustement de son portefeuille, est, bien entendu, rémunérée, même si nous n'en avons pas tenu compte dans les calculs ci-dessus ; l'acheteur, quant à lui, n'a pas nécéssairement envie d'assumer ce travail, d'autant qu'il subsiste une part de risque pour le vendeur si le modèle mathématique utilisé pour faire les calculs est trop grossièrement faux.

Remarque : Il est utile également d'observer ce qui se passe si le vendeur de l'option ne la couvre pas, soit qu'il n'achète aucun portefeuille de couverture avec la prime, soit qu'il achète bien, à la date initiale, le portefeuille (a_0, b_0) adapté mais ne le réajuste plus avant l'échéance. Examinons la question dans le cas de l'exemple : avec 5/8ième d'actif S_t et une dette de 25, le portefeuille acheté à la date initiale vaut à la date finale, si sa composition n'a pas été modifié dans l'intervalle, respectivement :

- $\frac{5}{8}180 - 25 = 87,5$, si le sous-jacent prend la valeur 180 ; or le vendeur doit dans ce cas 100 à l'acheteur.
- $\frac{5}{8}60 - 25 = 12,5$, si le sous-jacent prend la valeur 60 ; mais le vendeur ne doit rien à l'acheteur dans ce cas, il n'a donc pas de problème.
- $\frac{5}{8}20 - 25 = -12,5$, si le sous-jacent prend la valeur 20 ; ici encore le vendeur ne doit rien à l'acheteur mais il garde une dette de $12,5$.

On voit donc sur cet exemple qu'il peut se révéler désastreux de ne pas assurer complètement la couverture dynamique.

(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

Figure 1.3: Fonctions de paiement (ou pay-off) de quelques options standard : (a) straddel, (b) strangel, (c) bull spread, (d) bear spread, (e) butterfly spread, (f) condor. Exercice : après avoir étudié la définition d'un call et d'un put, indiquer comment au moyen d'achat et de vente de call et de put on peut synthétiser les options définies par les pay-off de cette figure.

Chapitre 2

Formule fondamentale dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein

L'objet de cette leçon est de généraliser le calcul du prix d'une option d'un modèle à une ou deux étapes à un modèle à n étapes, appelé *modèle de Cox, Ross et Rubinstein* ou *modèle binomial*. Cela conduira à une formule générale de prix d'option, appelée *formule fondamentale* que l'on obtient grâce à l'introduction de la *probabilité de calcul*. Ce sera aussi l'occasion d'aborder la notion d'*opportunité d'arbitrage*.

2.1 Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Le marché financier que nous considérons est un marché financier très simple qui comporte 2 actifs, un actif risqué (par exemple une action ou un indice), dont la valeur est notée S_t sur lequel sera souscrit l'option, et un actif non risqué (par exemple un dépot d'argent sur un compte rémunéré), dont la valeur est notée B_t.

J. Cox, S. Ross, et M. Rubinstein ont proposé en 1979[1]de modéliser l'évolution du prix d'un actif de la façon suivante :

- Pour une suite finie de n instants régulièrement répartis entre 0 et T, $\mathbb{T} := \{0, \delta t, 2\delta t, \ldots, n\delta t = T\}$, où $\delta t > 0$ est un réel fixé (supposé petit), la valeur $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ de l'actif risqué est égale à un nombre positif donné S_0 à l'instant $t = 0$, et elle évolue selon la règle suivante : si sa valeur à l'instant $t \in \mathbb{T}\backslash\{n\delta t\}$ est S_t, alors sa valeur à l'instant $t + \delta t$ sera soit $S_t u$ soit $S_t d$, où u et d sont des constantes qu'on supposera telles que $0 < d < u$. Donc $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ évolue sur un *arbre binaire* qui, à tout instant $t = k\delta t \in \mathbb{T}$, présente $k+1$ noeuds ou $k+1$ valeurs possibles égales à :

$$\{S_0 u^j d^{k-j}, j = 0, \ldots, k\}$$

  l'indice j représentant le nombre de fois où l'actif a évolué à la hausse entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = k\delta t$ (j est nombre de "up"), l'ordre des "up" et des "down" n'important pas.

- Pour la même suite d'instants $\mathbb{T}$, l'actif non risqué vaut $B_0 = 1$ à l'instant initial, et il évolue selon la récurrence $B_t = B_{t-\delta t}e^{r\delta t}$, soit $B_t = e^{rt}$, où r désigne le taux d'escompte monétaire qu'on suppose constant, pour simplifier, sur toute la période $[0, T]$.

[1] Ce modèle faisait suite à un modèle introduit en 1971 indépendement par Black et Scholes, et Merton, fondé sur une approche stochastique en temps continu. Le premier modèle de ce type remonte en fait à Louis Bachelier, dans sa thèse (1900), à laquelle Black et Scholes rendent hommage. On peut penser que c'est la sociologie des mathématiques qui explique la pause 1900-1971 de publication sur ce sujet. L'idée de l'approche discrète revient, selon les écrits de Cox et Rubinstein, à W. Sharpe, prix Nobel d'économie et auteur du fameux *Capital Asset Pricing Model* (1964). Nous montrerons dans une leçon ultérieure les liens entre les deux approches, discrete et continue. Nous pensons que l'approche discrète exposée ici, au dela de ses vertus pédagogiques, est plus à même de modéliser des situations plus subtiles pour lesquelles l'approche continue peut se révèler trop limitative. L'approche en temps continu, qui présente des avantages de calcul indéniables une fois que l'on maîtrise ce calcul, sera enseignée en Maîtrise. Remarquons que la question du calcul des prix d'options peut également être abordée au moyen d'équations aux dérivées partielles (voir par exemple le livre de P. Wilmott, S. Howison, et J. Dewynne, *The Mathematics of Financial Derivatives,* Cambridge University Press (1995)). Le lien entre les deux approches, équations aux dérivées partielles/modèles aléatoires continus, est aujourd'hui bien compris, et fait l'objet d'un cours de Denis Talay, en DEA de Mathématiques de l'UNSA notamment.

2.2 Construction du portefeuille de couverture

On considère un call européen, souscrit sur l'actif $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$, d'échéance $T = n\delta t$ et de prix d'exercice K. Il s'agit donc du droit d'acheter l'actif S_t à la date T au prix K. La valeur de cette option à l'instant final (son paye off) est donc

$$C_T = (S_T - K)^+ = \mathrm{Max}\,(S_T - K, 0) \tag{2.1}$$

c'est-à-dire que, si l'actif sous-jacent vaut $S_0 u^j d^{n-j}$ à l'instant final, pour un certain $j \in \{0, \ldots, n\}$, le call vaudra $C_T = (S_0 u^j d^{n-j} - K)^+$ pour ce même j.

Pour calculer, à partir de ces données, le prix du call à l'instant initial nous allons reprendre l'idée développée dans le cas des modèles à une et deux étapes, qui consiste à prendre pour prime de l'option la valeur initiale d'un portefeuille qui couvre l'option, c'est-à-dire dont la même valeur soit précisément celle de l'option à l'instant final. Comme pour le modèle à une ou deux étapes, nous cherchons pour définir le portefeuille Π_t par une relation de récurrence *rétrograde* ("backward") de manière à lier les inconnues Π_0, a_0, et b_0, prix initial et composition initiale, à la donnée de son paye off $(S_T - K)^+$. Cette récurrence se définit de la façon suivante : à toute date t, lorsque le sous-jacent prend la valeur S_t, le portefeuille se compose d'une certaine quantité de sous-jacent S_t, et d'une certaine quantité de placement non-risqué B_t. Comme sa composition a été arrêtée à l'instant $t - \delta t$ (il est commode de dire "la veille"), lorsqu'on ne connaissait que $S_{t-\delta t}$, et qu'elle est restée inchangée jusqu'à la date t, nous choisissons de la noter

$$a =: a_{t-\delta t} \text{ et } b =: b_{t-\delta t}.$$

Ce choix de notation est important. On a donc :

$$\delta\Pi_t = \Pi_t - \Pi_{t-\delta t} = (a_{t-\delta t}S_t + b_{t-\delta t}B_t) - (a_{t-\delta t}S_{t-\delta t} + b_{t-\delta t}B_{t-\delta t}) = a_{t-\delta t}\delta S_t + b_{t-\delta t}\delta B_t \tag{2.2}$$

où δS_t et δB_t sont des notations pour les différences $S_t - S_{t-\delta t}$ et $B_t - B_{t-\delta t}$. On peut alors recomposer le portefeuille, ayant prit connaissance de la valeur atteinte par S_t, mais par construction le portefeuille devra être *autofinancé*, c'est-à-dire que le changement de composition (couverture) intervenant à la date t devra se faire sans apport ni retrait de capitaux, c'est-à-dire en vérifiant la relation :

$$a_{t-\delta t}S_t + b_{t-\delta t}B_t = \Pi_t = a_t S_t + b_t B_t \tag{2.3}$$

Nous reviendrons sur cette *relation d'autofinancement*. On détermine la nouvelle composition de la façon suivante : désignons par S la valeur atteinte par l'actif sous-jacent à l'instant t, par Π ($\Pi := \Pi_t = a_{t-\delta t}S_t + b_{t-\delta t}B_t$) celle correspondante du portefeuille et par B celle de B_t. Deux issues sont possibles pour la valeur du sous-jacent, le "lendemain" Su et Sd, d'où résultent deux valeurs de portefeuille, que nous notons Π^u et Π^d, supposées connues par récurrence. Nous devons donc choisir la nouvelle composition (a, b) comme solution du système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} aSu + be^{r\delta t}B &= \Pi^u \\ aSd + be^{r\delta t}B &= \Pi^d \end{aligned}$$

qui se résoud immédiatement en

$$a = \frac{\Pi^u - \Pi^d}{Su - Sd} \text{ et } b = e^{-r\delta t}\frac{\Pi^d u - \Pi^u d}{B(u-d)}. \tag{2.4}$$

On pose alors $a_t = a$ et $b_t = b$ et on en déduit la valeur cherchée Π_t, par la formule $\Pi_t = a_t S_t + b_t B_t$. On a donc la proposition suivante :

Proposition 2.1 *Dans un marché financier $(S_t, B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ où S_t suit un modèle CRR, toute option d'échéance T et de fonction de paiement $\varphi(S_T)$ est* duplicable, *c'est-à-dire qu'il existe un portefeuille autofinancé qui la couvre.*

Preuve : On raisonne par récurence sur le nombre n d'étapes du modèle. On a vu le cas d'un modèle à une étape ; pour un modèle à n étapes, on remarque simplement que, comme S_t prend deux valeurs S_0u et S_0d à l'instant δt, ces deux valeurs sont chacunes les valeurs initiales d'un modèle à $n-1$ étapes auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. D'où l'existence de deux portefeuilles de couverture $\Pi^u_{\delta t}$ et $\Pi^d_{\delta t}$ avec lesquels on peut alors calculer Π_0 (et donc C_0) comme dans un modèle à une étape. □

2.3 Probabilité de calcul et formule fondamentale

Le calcul évoqué, bien que simple dans son principe, est lourd dans sa mise en oeuvre (résolution d'un grand nombre de systèmes d'équations) et nous allons voir à présent comment on peut le simplifier grâce à l'introduction d'un formalisme probabiliste.

La remarque cruciale est la suivante : si l'on calcule la valeur du portefeuille $\Pi = aS + bB$ en utilisant les solutions (a, b) trouvées en (2.4), on voit facilement qu'on peut aussi l'écrire sous la forme

$$\Pi = e^{-r\delta t}(p\Pi^u + q\Pi^d), \tag{2.5}$$

si l'on introduit les quantités

$$p := \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d} \text{ et } q := \frac{u - e^{r\delta t}}{u - d}. \tag{2.6}$$

Or il est facile de vérifier que ces quantités sont telles que $p + q = 1$ et que, si l'on suppose, ce que nous ferons désormais, que $0 < d < e^{r\delta t} < u$, ces quantités p et q vérifient aussi $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$. Donc si l'on considère que Π^u et Π^d sont les deux valeurs que peut prendre une v.a. de Bernouilli Π avec $P(\Pi = \Pi^u) = p$ et $P(\Pi = \Pi^d) = q$ alors l'équation (2.5) affirme simplement que Π est précisement le produit par le *facteur d'actualisation*, $e^{-r\delta t}$, de l'espérance de cette v.a., c'est-à-dire *l'espérance actualisée* de cette v.a.. Les valeurs p et q ainsi définies se calculent directement en fonction de u, d et r, donc à partir des données du modèle choisi $(S_t, B_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Mais elles ont aussi une autre propriété essentielle : on a en effet

$$S = e^{-r\delta t}(pSu + qSd), \tag{2.7}$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$S_{t-\delta t} = e^{-r\delta t}\mathbb{E}(S_t \text{ connaissant } S_{t-\delta t}).$$

Nous appelons la probabilité $(p, 1-p)$ la *probabilité de calcul* car c'est avec elle que l'on pourra calculer les prix d'options. On la désigne aussi sous le nom de *probabilité risque neutre* ou encore *probabilité de martingale*, pour des raisons sur lesquelles nous reviendrons.

La probabilité de calcul permet de munir le modèle de l'actif sous-jacent (S_t) d'une structure de *marche aléatoire*, c'est-à-dire que, pour chaque $t \in \mathbb{T}$, les $k+1$ valeurs $\{S_0u^jd^{k-j}, j = 0, \dots, k\}$ que peut prendre S_t sont les $k+1$ valeurs possibles d'une v.a. dont la loi est donnée par :

$$P(S_t = sS_0u^jd^{k-j}) = \binom{k}{j}p^j(1-p)^{k-j}. \tag{2.8}$$

En effet la valeur $S_0u^jd^{k-j}$ atteinte par S_t correspond à une trajectoire qui présente j "montées" et $k-j$ "descentes" dont la probabilité est $p^j(1-p)^{k-j}$ si l'on fait l'hypothèse que ces mouvements, à la hausse ou à la baisse, sont indépendants, et il est facile de voir qu'il y a exactement $\binom{k}{j}$ trajectoires qui atteignent cette valeur. La formule (2.8) explique le nom de modèle binomial que l'on donne souvent au modèle Cox-Ross-Rubinstein. On a la proposition suivante que l'on obtient par un raisonnement par récurrence comme dans la preuve de la proposition précédente, en utilisant la relation de récurrence retrograde (2.5) et (2.6) :

Proposition 2.2 *Dans un marché financier $(S_t, B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ où S_t suit un modèle CRR, le prix d'une option européenne $(T, \varphi(S_T))$ est donnée par*

$$e^{-rT}\mathbb{E}(\varphi(S_T)) = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\varphi(S_0u^jd^{n-j}) \tag{2.9}$$

c'est-à-dire que ce prix est la valeur actualisée de l'espérance, sous la probabilité de calcul, de sa fonction de paiement ; ainsi, pour une option call, c'est-à-dire si $\varphi(S) = (S-K)^+$, on a

$$C_0 = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}(S_0u^jd^{n-j} - K)^+$$

et pour le cas d'un put, c'est-à-dire si $\varphi(S) = (K-S)^+$, on a

$$P_0 = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}(K - S_0u^jd^{n-j})^+.$$

La formule (2.9) s'appelle la *formule fondamentale* pour l'évaluation du prix d'une option européenne.

Exemple : Si l'on revient à l'exemple de modèle à deux étapes donné à la leçon précédente, le calcul de la prime C_0 peut se faire à présent simplement : on détermine la probabilité de calcul définie par la relation $S = pSu + (1-p)Sd$ (on a supposé $r = 0$) ; on obtient $p = \frac{1}{2} = 1 - p$; puis on calcule C_0 comme l'espérance $C_0 = 100P(S_T = 180) + 0P(S_T = 60) + 0P(S_T = 20) = 100(\frac{1}{4}) = 25$.

Remarque : Notons que si la formule fondamentale donne immédiatement le prix de l'option, elle ne donne pas directement la composition du portefeuille de couverture.

2.4 Hypothèses du modèle

La formule fondamentale ci-dessus (formule (2.9) a été obtenue sous l'hypothèse explicite que le modèle choisi pour la dynamique de l'actif sous-jacent est le modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein. Mais il y a en fait d'autres hypothèses, économiques, qui ont été faites implicitement, et que nous allons étudier à présent.

- La plus irréaliste, mais difficilement contournable, est celle que l'on appelle l'hypothèse de *marché parfait*. Elle suppose d'une part que le marché est *infiniment liquide : à* tout instant, il existe des acheteurs et des vendeurs pour tous les titres du marché ; elle suppose aussi qu'il n'y a aucune contrainte sur les quantités d'actifs achetés ou vendus (opérations nécessaires pour assurer la couverture dynamique des options) ; en particulier, les titres sont supposés infiniment divisibles, et les agents sans de limitation de découvert. Enfin un marché parfait suppose aussi l'absence de coûts de transaction ainsi que l'égalité des prix à l'achat et à la vente (pas de fourchette bid-ask).

  L'hypothèse de marché parfait est une hypothèse théorique, évidemment non satisfaite dans la pratique, qu'il convient de considérer comme "satisfaite en première approximation", un peu comme l'hypothèse de gaz parfait en physique. Les modèles mathématiques plus élaborés que le modèle CRR cherchent parfois à s'en affranchir sur tel ou tel aspect. Mais il faut reconnaître que, pour l'essentiel, on ne sait pas le faire aujourd'hui de façon satisfaisante et qu'il reste beaucoup à améliorer dans cette direction.

- La seconde hypothèse est celle, déja mentionnée, de *taux d'escompte monétaire constant*. Nous avons par exemple supposé qu'un actif valant S_t à l'instant t a une valeur actuelle, en $t = 0$, égale à $e^{-rt}S_t$. Or, durant la période $[0, t]$, le taux d'escompte varie en réalité et ce qui pourrait être une approximation raisonnable si t était très petit, cesse d'être valable lorsque t devient appréciable. Les modèles plus élaborés font parfois l'hypothèse d'un taux d'escompte stochastique et on peut alors, moyennant le choix d'un modèle mathématique pour la dynamique des taux, intégrer dans la probabilité de calcul, et donc dans l'évaluation des prix d'option par la formule fondammentale, la présence de taux variables.

- La troisième hypothèse est l'*absence de dividendes* versés par les actifs sous-jacents. En fait, il existe des modèles analogues au modèle CRR qui autorisent la prise en compte de dividende.

- La dernière hypothèse est probablement la plus importante : elle porte le nom d'hypothèse d'*absence d'opportunité d'arbitrage* (simplement notée AOA) et joue un rôle essentiel.

  Définition : Une opportunité d'arbitrage est un portefeuille autofinançant nul en $t = 0$ ($\Pi_0 = 0$) et tel que $\Pi_T \geq 0$ dans tous les états du monde et $P(\Pi_T > 0) > 0$.

  Proposition 2.3 *Dans un marché dans lequel on fait l'hypothèse d'AOA, deux portefeuilles qui ont la même valeur à une date future T, ont la même valeur à toutes dates intermédiaires $0 < t < T$.*

  En effet, si ce n'était pas le cas, on pourrait former un portefeuille composé du premier Π_t(en crédit), du second $-\tilde{\Pi}_t$ en débit, et d'une somme d'argent égale à la différence $\alpha := \Pi_t - \tilde{\Pi}_t$ placée au taux r. Si par exemple on suppose, par l'absurde, $\alpha > 0$, alors ce portefeuille est une opportunité d'arbitrage :

$t \in [0, T[$	T
Π_t	Π_T
$-\tilde{\Pi}_t$	$-\tilde{\Pi}_T$
α	$\alpha e^{r(T-t)}$
0	> 0

L'hypothèse d'AOA permet aussi de justifier les inégalités qui ont été supposées satisfaites par l'actif risqué du modèle CRR :

$$0 < d < e^{r\delta t} < u. \tag{2.10}$$

En effet comme $e^{r\delta t}$ est le rendement $\frac{B_t}{B_0}$ de l'actif non risqué durant le laps de temps δt, et comme d et u sont les deux rendements possibles $\frac{S_t}{S_0}$ de l'actif risqué sur le même laps de temps, si l'on avait $d < u < e^{r\delta t}$ par exemple, on aurait une opportunité d'arbitrage :

t	$t + \delta t$
$-S_t$	$-S_t d$ ou $-S_t u$
α	$\alpha e^{r\delta t}$
0	$S_t(e^{r\delta t} - d)$ ou $S_t(e^{r\delta t} - u)$

Car si α est une somme d'argent égale à S_t et placée au taux r, le portefeuille représenté dans ce tableau est une opportunité d'arbitrage. On raisonnerait de façon analogue dans le cas $e^{r\delta t} < d < u$, avec $+S_t$ et $-\alpha$.

Remarque : Une opportunité d'arbitrage est parfois appelée un *free lunch* (et l'hypothèse d'AOA, *no free lunch*), ce qui résume l'idée que sous cette hypothèse il n'y a pas de possibilité de gagner d'argent à coup sûr, c'est-à-dire sans prendre de risque.

Remarque : C'est encore un raisonnement d'AOA qui rend plausible l'unicité du prix de l'option. En effet nous avons choisi pour prix de l'option celui d'un portefeuille de couverture. Mais pourquoi n'y aurait-il pas une autre façon de s'y prendre qui conduirait à un prix différent, disons un prix moindre par exemple ? En réalité ce n'est pas possible car si tel était le cas, un portefeuille comprenant l'option, vendue à un prix C_0 strictement inférieur au prix du portefeuille de couverture Π_0, le portefeuille de couverture lui-même en débit et une somme $\Pi_0 - C_0$, serait une opportunité d'arbitrage comme l'indique le tableau suivant :

$t = 0$	$t = T$
C_0	C_T
$-\Pi_0$	$-\Pi_T$
$\Pi_0 - C_0$	$(\Pi_0 - C_0)e^{rT}$
0	> 0

Enfin une conséquence de l'AOA, importante dans la pratique, est la *relation de parité call-put :*

Proposition 2.4 *Considérons un call C_t et un put P_t souscrits sur le même actif sous-jacent S_t, de même date d'échéance T et même prix d'exercice K. On a la relation de parité call-put suivante :*

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{r(T-t)}$$

Preuve : On applique la proposition 2.3 : les portefeuilles $\Pi_t := C_t - P_t$ et $\tilde{\Pi}_t := S_t - Ke^{r(T-t)}$ ont même valeur à l'échéance $t = T$ puisque l'on a $(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K$. □

Chapitre 3

Marches aléatoires. Filtration et information

A coté des modèles dynamiques *déterministes*, c'est-à-dire pour lesquels les quantités étudiées ont une évolution gouvernée par une équation différentielle ou une équation récurrente dont la connaissance fournit une prédiction *certaine* de ses valeurs futures, il existe des modèles dynamiques *stochastiques*, souvent plus pertinents ; les plus simples sont les *marches aléatoires* qui font l'objet de cette leçon. Dans le cas d'une marche aléatoire, l'évolution future d'une quantité observée, le cours d'un titre, un indice, un taux, n'est plus constituée d'une trajectoire unique mais de n trajectoires possibles dont une seule se réalisera. L'ensemble des trajectoires possibles est muni d'une probabilité qui pourrait représenter la probabilité que la trajectoire se réalise, mais ce ne sera pas notre point de vue ici, et qui représentera le prix ou le coût qu'il convient d'attacher à la réalisation de cette trajectoire en terme de risque : c'est le point de vue auquel nous a conduit l'introduction de la probabilité de calcul.

3.1 Définitions et exemples

Définition : Soient Ω un ensemble fini, $\mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{P}(\Omega)$, $(\Omega, P, \mathcal{F})$ une espace probabilisé fini et soit $\mathbb{T} = \{0, \delta t, \ldots, n\delta t = T\}$, où $\delta t > 0$ est un réel fixé (petit). On appelle *marche aléatoire (finie)* une application (X) mesurable

$$X : \Omega \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$$

Oublions provisoirement l'adjectif “mesurable” dont nous préciserons le sens plus loin et étudions tout d'abord un exemple :

Exemple : Le modèle CRR que nous avons déjà étudié fournit un premier exemple de marche aléatoire : elle modélise la dynamique de l'actif sous-jacent à une option. L'espace probabilisé fini Ω considéré est l'ensemble à 2^n élements $\Omega = \{-1, 1\}^n$; un évènement $\omega \in \Omega$ est une suite finie de ± 1 qui représentent la succession des n mouvements vers le haut (up) ou vers le bas (down) de l'actif. En introduisant la probabilité de calcul, nous avons posé, pour un $\omega \in \Omega$ qui comporte j composantes égales à $+1$ (et $(n-j)$ égales à -1,

$$P(\omega) := p^j (1-p)^{n-j},$$

faisant implicitement une hypothèse d'indépendance des accroissements sur laquelle nous reviendrons. La tribu $\mathcal{F}$ est ici simplement la tribu pleine $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. La marche aléatoire CRR, notée (S) est définie sur $\Omega \times \mathbb{T}$ par la formule suivante, lorsque ω comporte j composantes égales à $+1$ et $t = k\delta t$:

$$(\omega, t) \mapsto S_t(\omega) : := S_0 u^j d^{k-j}.$$

Il y a deux façons de voir une marche aléatoire (X) et c'est précisément ce qui fait la richesse de cette notion :

1. Si on fixe un $\omega \in \Omega$, l'application $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ qui à $t \in \mathbb{T}$ associe $X_t(\omega)$ est une fonction de t qu'on appelle la *trajectoire* de l'*état du monde* ω et qui représente l'une des évolutions au cours du temps

de la quantité modélisée, celle qui correspond à ω. On peut munir chaque trajectoire $t \mapsto X_t(\omega)$ d'une probabilité en posant

$$P(t \mapsto X_t(\omega)) := P(\overline{\omega})$$

où $\overline{\omega}$ est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ qui conduisent à la même trajectoire. Une marche aléatoire peut donc être vue comme *un espace probabilisé de trajectoires*. Par exemple dans le modèle CRR à $n = 3$ étapes, l'espace Ω comporte 8 évènements élémentaires, $\omega_1 = (+1, +1, +1)$, $\omega_2 = (+1, +1, -1)$, $\omega_3 = (+1, -1, +1)$, $\omega_4 = (+1, -1, -1)$, $\omega_5 = (-1, +1, +1)$, $\omega_6 = (-1, +1, -1)$, $\omega_7 = (-1, -1, +1)$, et $\omega_8 = (-1, -1, -1)$ et il y a 8 trajectoires notées γ_i :

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \big((S_0, 0) \,;(\delta t, S_0 u) \,;(2\delta t, S_0 u^2) \,;(3\delta t, S_0 u^3)\big)\\
\gamma_2 &= \big((S_0, 0) \,;(\delta t, S_0 u) \,;(2\delta t, S_0 u^2) \,;(3\delta t, S_0 u^2 d)\big)\\
\gamma_3 &= \big((S_0, 0) \,;(\delta t, S_0 u) \,;(2\delta t, S_0 ud) \,;(3\delta t, S_0 u^2 d)\big)\\
\gamma_4 &= \big((S_0, 0) \,;(\delta t, S_0 u) \,;(2\delta t, S_0 ud) \,;(3\delta t, S_0 ud^2)\big)\\
\gamma_5 &= \big((S_0, 0) \,;(\delta t, S_0 d) \,;(2\delta t, S_0 ud) \,;(3\delta t, S_0 u^2 d)\big)\\
\gamma_6 &= \big((S_0, 0) \,;(\delta t, S_0 d) \,;(2\delta t, S_0 u^2) \,;(3\delta t, S_0 ud^2)\big)\\
\gamma_7 &= \big((S_0, 0) \,;(\delta t, S_0 d) \,;(2\delta t, S_0 d^2) \,;(3\delta t, S_0 ud^2)\big)\\
\gamma_8 &= \big((S_0, 0) \,;(\delta t, S_0 d) \,;(2\delta t, S_0 d^2) \,;(3\delta t, S_0 d^3)\big)
\end{aligned}$$

2. Si on fixe un $t \in \mathbb{T}$, l'application $\Omega \to \mathbb{R}$ qui à $\omega \in \Omega$ associe $X_t(\omega)$ est une variable aléatoire ; la marche aléatoire définit donc pour chaque t une v.a.. On peut donc aussi voir une marche aléatoire comme *une famille à un paramètre t* de v.a.. Dans l'exemple du modèle CRR à 3 étapes, ces v.a. sont S_0 (qui est la v.a. certaine égale à la constante S_0), $S_{\delta t}$, $S_{2\delta t}$ et $S_{3\delta t}$ dont les lois sont données respectivement par les tableaux suivants :

$S_{\delta t}$	$S_0 d$	$S_0 u$
$P(S_{\delta t} = \cdot)$	$(1-p)$	p

$S_{2\delta t}$	$S_0 d^2$	$S_0 du$	$S_0 u^2$
$P(S_{2\delta t} = \cdot)$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

$S_{3\delta t}$	$S_0 d^3$	$S_0 d^2 u$	$S_0 du^2$	$S_0 u^3$
$P(S_{3\delta t} = \cdot)$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

3.2 La marche de Wiener et ses dérivées

La marche aléatoire la plus utilisée est la marche de Wiener dont l'importance tient notamment au fait que sa "limite" quand δt tend vers 0 est le fameux *processus stochastique* appelé mouvement brownien. On va définir la marche de Wiener au moyen de ses accroissements.

Définition : Soit (X) une marche aléatoire (m.a.). On appelle *accroissements* de (X) la marche aléatoire définie pour tout $t \in \mathbb{T} - \{0\}$ par

$$\delta X_t := X_t - X_{t-\delta t}$$

Définition : Une m.a. (X) est dite à *accroissements indépendants* si elle est telle que les v.a. $(\delta X_t, t \in \{\delta t, \ldots, n\delta t\})$ forment une famille de v.a. indépendantes.

La plupart des m.a. que nous étudierons auront la propriété d'être à accroissements indépendants. C'est le cas par exemple de la marche CRR. A noter que, par contre, la m.a. CRR elle-même n'est pas une famille de v.a. indépendantes : ce qui est vrai pour ses accroissements n'est pas vrai pour la marche elle-même.

Notons aussi que la donnée d'une m.a. (X) à accroissement indépendants équivaut à la donnée de sa valeur à l'instant $t = 0$ et de la m.a. de ses accroissements (δX).

Définition : Soient $\Omega = \{-1, +1\}^n$, $0 < p < 1$ et $\delta t > 0$ un réel fixé. On appelle *p-marche de Wiener* (ou simplement *marche de Wiener* lorsque $p = \frac{1}{2}$) la m.a. à accroissements indépendants définis $t \in \mathbb{T} - \{0\}$ par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} W_0 & = & 0 \\ \delta W_t & = & \pm\sqrt{\delta t} \end{array} \right. \tag{3.1}$$

avec $P(\delta W_t = \sqrt{\delta t}) = p$ et $P(\delta W_t = -\sqrt{\delta t}) = 1 - p$. On vérifie facilement que $\mathbb{E}(\delta W_t) = (2p-1)\sqrt{\delta t}$ et $\mathrm{Var}\,(\delta W_t) = 4p(1-p)\delta t$ (et donc $\mathbb{E}(\delta W_t) = 0$ et $\mathrm{Var}\,(\delta W_t) = \delta t$ pour $p = \frac{1}{2}$).

A partir de la marche de Wiener, on peut définir d'autres marches aléatoires :

Définition : On appelle *p-marche de Wiener avec dérive* la marche aléatoire définie par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_0 & = & x_0 \\ \delta X_t & = & \mu\delta t + \sigma\delta W_t \end{array} \right. \tag{3.2}$$

et *p-marche de Wiener géométrique* la marche aléatoire définie par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_0 & = & x_0 \\ \delta X_t & = & X_{t-\delta t}(\mu\delta t + \sigma\delta W_{t-\delta t} \end{array} \right. \tag{3.3}$$

En fait la marche de Wiener géométrique est un exemple de marche CRR pour laquelle $u = 1 + \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}$ et $d = 1 + \mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}$. On pourra vérifier facilement que si $r = \mu$, les inégalités $0 < d < e^{r\delta t} < u$ sont satisfaites pourvu que δt soit suffisamment petit.

3.3 Filtration et information

Dans ce paragraphe, nous allons voir comment associer à toute marche aléatoire une filtration et pourquoi il est naturel de considérer que cette filtration, comme le font souvent les praticiens en finance, représente l'information disponible sur le marché à un instant donné.

Soient $\Omega^1, \ldots, \Omega^m$ des parties non vides de Ω. On dit que $\mathfrak{P} := \{\Omega^1, \ldots, \Omega^m\}$ est une *partition* de Ω si et seulement si les Ω^i sont deux-à-deux disjoints et Ω est la réunion des Ω^i.

La relation $\sim$ sur Ω définie par $\omega' \sim \omega$" si et seulement si ω' et ω" appartiennent à un même $\Omega^i \in \mathfrak{P}$ est une relation d'équivalence. Réciproquement, si $\sim$ est une relation d'équivalence quelconque sur Ω, les classes d'équivalences $\overline{\omega} = \{w' \in \Omega \mid \omega' \sim \omega\}$ des éléments de Ω consituent une partition de Ω.

Définition : Lorsque Ω est l'espace probabilisé sous-jacent à une marche aléatoire (X), on peut définir sur Ω, pour chaque $t \in \mathbb{T}$, des partitions, que nous noterons $\mathfrak{P}_t$, associées à la marche aléatoire, par la relation d'équivalence $\overset{t}{\sim}$ suivante :

$$\omega' \overset{t}{\sim} \omega\text{"} \quad \text{si et seulement si } X_\tau(\omega') = X_\tau(\omega\text{"}) \text{ pour tout } \tau \in [0..t]$$

Exemple : Si la marche aléatoire est le modèle CRR à 3 étapes, on a :

- si $t = 0$, $\mathfrak{P}_0 = \{\Omega\}$.
- si $t = \delta t$, $\mathfrak{P}_{\delta t} = \{\Omega^1 = \{w_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \Omega^2 = \{w_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}\}$.
- si $t = 2\delta t$, $\mathfrak{P}_{2\delta t} = \{\Omega^{11} = \{w_1, \omega_2\}, \Omega^{12} = \{\omega_3, \omega_4\}, \Omega^{21} = \{w_5, \omega_6\}, \Omega^{22} = \{\omega_7, \omega_8\}\}$.
- si $t = 3\delta t$, $\mathfrak{P}_{3\delta t} = \{\{w_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}, \{w_5\}, \{\omega_6\}, \{\omega_7\}, \{\omega_8\}\}$.

Définition : Soit Ω un ensemble fini et $\mathcal{F}$ une tribu de parties de Ω. On appelle *atome* de $\mathcal{F}$ tout élément de $\mathcal{F}$ qui ne contient pas d'autre élément de $\mathcal{F}$ que lui même et l'ensemble vide.

On démontre facilement la proposition suivante en appliquant les définition de partition et de tribu :

Proposition 3.1 *Dans un ensemble Ω fini, on peut associer à toute partition $\mathfrak{P}$ la tribu engendrée par les éléments Ω^i de la partition et réciproquement on peut associer à toute tribu la partition formée par ses atomes.*

Exemple : Si la marche aléatoire est le modèle CRR à 3 étapes, on peut associer à chaque partition $\wp_t$, pour tout $t \in \mathbb{T}$ une tribu, notée $\mathcal{F}_t$:

- si $t = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$.
- si $t = \delta t$, $\mathcal{F}_{\delta t} = \{\phi, \Omega^1, \Omega^2, \Omega\}$.
- si $t = 2\delta t$, $\mathcal{F}_{2\delta t} = \{\phi, \Omega^{11}, \Omega^{12}, \Omega^{21}, \Omega^{22}, \Omega^1, \Omega^2, \Omega^{11} \cup \Omega^2, \dots, \Omega\}$.
- si $t = 3\delta t$, $\mathcal{F}_{3\delta t} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Et on a évidemment $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_{\delta t} \subset \mathcal{F}_{2\delta t} \subset \mathcal{F}_{3\delta t}$. Cette suite croissante de tribus est appelée une *filtration.*

En généralisant l'exemple précédent, on comprend facilement qu'il est possible d'associer à toute marche aléatoire (X) une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ définie de la façon suivante : pour un t donné, les atomes de la tribu $\mathcal{F}_t$ sont constitués des états du monde $\omega \in \Omega$ auxquels sont associés des trajectoires qui coïncident jusqu'à l'instant t.

Lorsque $t = 0$, l'information dont on dispose est que l'un des états du monde $\omega \in \Omega$ va se réaliser (mais on ne sait pas lequel). A l'instant $t = \delta t$, l'actif que l'on modélise à fait soit un mouvement vers le haut soit un mouvement vers le bas et donc on sait maintenant que l'état du monde qui se réalisera appartient à Ω^1 ou bien à Ω^2. Et à l'instant $t = 2\delta t$, on saura qu'il appartient à Ω^{11}, Ω^{12}, Ω^{21} ou Ω^{22}, et ainsi de suite. A chaque nouvelle étape l'information dont on dispose sur l'actif observé augmente et on peut mesurer la finesse de cette information par la partition $\wp_t$ ou bien, ce qui revient au même par la tribu $\mathcal{F}_t$. La suite de ces tribus, $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ représente donc *l'information dont on dispose à la date t en observant le marché.* La raison pour laquelle on parle plus souvent de la filtration des tribus $\mathcal{F}_t$ plutot que de la famille des partitions $\wp_t$ est que, lorsqu'on voudra remplacer les modèles finis étudiés ici par des modèles continus, où Ω est supposé infini, la filtration continuera à être bien définie alors que la partition ne le sera plus.

Chapitre 4

Options barrières

Dans cette leçon, on va étudier l'exemple le plus simple d'option *exotique*, c'est-à-dire d'option dont la valeur n'est pas seulement fonction des valeurs atteintes par l'actif sous-jacent à l'échéance mais aussi de toutes les valeurs qu'il prend pendant la durée du contrat. De telles options s'appellent aussi des options *dépendant du chemin*. L'étude des options barrières sera aussi l'occasion de rencontrer la notion de *temps d'arret* et surtout le joli *principe de réflexion* d'André.

4.1 Définitions et exemples

Une option barrière $(T, \varphi(S_T), H)$ est une produit dérivé sur un actif sous-jacent $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ pour lequel le versement de la fonction de paiment $\varphi(S_T)$ à l'échéance T est soumis au fait que l'actif sous-jacent ait franchis ou non, durant la durée de vie du contrat, vers le haut ou vers le bas, une barrière H donnée. Il existe une grande variété d'option barrière ; on peut ranger les plus courantes en deux catégories :

- **les knock-out :** l'option expire automatiquement lorsque le sous-jacent touche la barrière.
- **les knock-in :** l'option n'est activée que si le sous-jacent touche la barrière.

Par ailleurs, ces options s'appellent put, call, options binaires, etc, ..., selon que $\varphi(S) = (K - S)^+$, $\varphi(S) = (S - K)^+$, $\varphi(S) = \mathbb{I}_{S>K}$, etc, ... Voici quelques exemples :

- Un *down and out call* (DOC) de prix d'exercice K, d'échéance T et de barrière H est le droit d'acheter l'actif sous-jacent au prix K à la date T si celui-ci n'est jamais descendu en dessous de H pendant la durée de vie du contrat.
- Un *down and in put* (DIP) de prix d'exercice K, d'échéance T et de barrière H est le droit de vendre l'actif sous-jacent au prix K à la date T seulement si celui-ci est descendu en dessous de H pendant la durée de vie du contrat.
- Un *up and out put* (UOP) de prix d'exercice K, d'échéance T et de barrière H est le droit de vendre l'actif sous-jacent au prix K à la date T si celui-ci n'a jamais dépassé le niveau H pendant la durée de vie du contrat.

Il existe de même des options DIC, UIC, UIP, DOP et UOC, mais aussi des options avec doubles barrières et bien d'autres. Souvent le contrat prévoit une *rebate*, somme payée en cash, dans le cas où l'option est out.

Le principal intérêt des options barrières est qu'elles sont moins chères que les options ordinaires correspondantes, environs quatre fois moins chères, car elles laisse à l'acheteur, et d'ailleurs aussi au vendeur, un risque résiduel. Par exemple pour une option DIC, la couverture qu'un call offre par rapport à une envolée du cours du sous-jacent est tout simplement perdue dans le cas où celui-ci n'a pas franchi la barrière. Mais ce risque est jugé suffisamment improbable par celui qui accepte de le prendre ou bien il considère que ses conséquences sont acceptables au regard de l'économie qu'il procure. Pour le vendeur, l'un des intérêt est que, comme les options barrières se négocient uniquement de gré à gré (et non sur les marchés organisés comme c'est le cas pour les put et les call ordinaires), il peut prendre en général des marges plus élévées car le marché des produits OTC (over the counter) est moins tendu.

A titre d'exemple, considérons une entreprise qui va recevoir dans 6 mois en Euros des revenus perçus en Yen et qui craint qu'une dépréciation du Yen par rapport à l'Euro dans les mois à venir vienne mettre en péril le niveau de ces revenus. Elle peut acheter un put à 6 mois qui lui donnera le droit de vendre des Yens en Euros à un prix fixé, par exemple égal ou légèrement inférieur au cours actuel. Mais si l'entreprise achète une option DIP, avec une barrière H peu inférieure au prix d'exercice K, cela lui en coûtera bien moins chère et cela lui assurera la même couverture contre une dépréciation du Yen, sauf dans le cas où à aucun moment donné durant ces 6 mois, le cours ne descend en dessous de H. Mais ce cas correspond à une situation où la dépréciation redoutée est restée très limité et le risque résiduel peut donc être jugé sans gravité.

Ce sont des situations de ce type qui conduisent au développement du marché des options barrières; celles-ci constituent plus de 10% de l'activité sur le marché des changes par exemple.

4.2 Mesurabilité et temps d'arrêt

Rappelons que si $(\Omega, P, \mathcal{F})$ est un espace probabilisé, $\mathcal{T}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$, on dit qu'une v.a. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est *mesurable* par rapport à $\mathcal{T}$, ou qu'elle est $\mathcal{T}$-mesurable, si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{X \leq x\} \in \mathcal{T}$. Il est clair que si $\mathcal{T} = \{\phi, \Omega\}$, une v.a. $\mathcal{T}$-mesurable est nécessairement constante et si A étant une partie de Ω, $\mathcal{T} = \{\phi, A, A^c, \Omega\}$, une v.a. $\mathcal{T}$-mesurable aura au plus deux valeurs. Plus généralement, on a la proposition suivante :

Proposition 4.1 *Lorsque $(\Omega, P, \mathcal{F})$ est un espace probabilisé fini et $\mathcal{T}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$, une v.a. est $\mathcal{T}$-mesurable si et seulement si elle est constante sur les atomes de la tribu $\mathcal{T}$.*

Il est aussi utile de connaître la notion de *tribu engendrée par une v.a.* dont nous rappelons la définition :

Définition : Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une v.a. sur $(\Omega, P, \mathcal{F})$, on appelle *tribu engendrée* par X, notée $\sigma(X)$, la plus petite sous tribu de $\mathcal{F}$ par rapport à laquelle X est mesurable. Plus généralement si $X_1, X_2, \ldots, X_m$ est une suite de v.a. sur $(\Omega, P, \mathcal{F})$, la tribu engendrée par cette suite de v.a., notée $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ est la plus petite sous tribu de $\mathcal{F}$ par rapport à laquelle toutes les v.a. X_i, $i = 1, \ldots, m$, sont mesurables.

Exemple : On a vu qu'on peut associer à toute marche aléatoire $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ telle que, pour un $t \in \mathbb{T}$ donné, les atomes de $\mathcal{F}_t$ sont formés des états du monde $\omega \in \Omega$ dont les trajectoires $X(\omega)$ coïncident jusqu'à l'instant t. On se convainc facilement que les v.a. X_t sont $\mathcal{F}_t$-mesurables et aussi $\mathcal{F}_s$-mesurable pour tout $s \geq t$ mais X_t n'est généralement pas $\mathcal{F}_s$-mesurable pour $s < t$. Intuitivement la propriété d'être $\mathcal{F}_t$-mesurable pour une v.a. sur Ω signifie simplement, $\mathcal{F}_t$ représentant l'information dont on dispose à l'instant t, que cette v.a. ne dépend que de l'information dont on dispose à cet instant ou plus simplement qu'elle est *connue à* l'instant t, mais qu'elle ne peut pas prévoir l'avenir, c'est-à-dire distinguer (en leur donnant des valeurs différentes) deux trajectoires qui coïncident jusqu'à l'instant t mais ne coïncideraient plus au dela.

En particulier il est facile de voir que si $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est la filtration associée à une m.a. $(S_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de Cox-Ross-Rubinstein, S_T est une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable de même que toute v.a. de la forme $\varphi(S_T)$ où φ est une fonction (déterministe) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque : Il y a un point un peu subtile qu'il est important de noter ici : pour une marche aléatoire $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$, les deux tribus $\mathcal{F}_t$ et $\sigma(X_t)$ ne sont pas égales. La première représente l'information dont on dispose jusqu'à l'instant t et la seconde l'information dont on dispose à l'instant t. On a en réalité on a $\mathcal{F}_t = \sigma(X_0, X_{\delta t}, \ldots, X_{t-\delta t}, X_t)$ et donc $\sigma(X_t) \subset \mathcal{F}_t$ mais cette inclusion est stricte. Une v.a. qui est $\mathcal{F}_t$-mesurable, donne donc nécessairement la même valeur à deux états du monde pour lesquels X_t coïncide *jusqu'à l'instant* t et donc, en particulier la même valeur pour deux états du monde pour lesquels X_t coïncide *à l'instant* t, alors qu'une v.a. $\sigma(X_t)$-mesurable donne la même valeur à deux états du monde pour lesquels X_t coïncide à l'instant t, mais pas nécessairement la même valeur à deux états du monde pour lesquels X_t coïncide à l'instant t mais pas à un instant antérieur.

La notion de *temps d'arrêt* formalise l'idée d'un instant où quelque chose se produit, par exemple le passage d'une barrière, sans que cela ait lieu nécessairement au même instant sur toutes les trajectoires : en ce sens c'est une temps *aléatoire* puisque sa valeur dépend de l'état du monde.

Définition : Si $(\Omega, P, \mathcal{F})$ est un espace probabilisé et $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une filtration, une v.a. $\tau : \Omega \to \mathbb{T}$ est un *temps d'arrêt* si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{T}$, $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$.

On peut vérifier que la condition "pour tout $t \in \mathbb{T}$, $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$" est équivalente à la précédente. L'exemple suivant est l'un des exemples de temps d'arrêt les plus utilisés :

Exemple : Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une m.a. sur $(\Omega, P, \mathcal{F})$, $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sa filtration associée et $A \subseteq \mathbb{R}$ un sous ensemble quelconque. La v.a. suivante qui représente *le premier instant d'entrée d'une trajectoire dans le sous ensemble* A est un temps d'arrêt :

$$\tau(\omega) := \begin{cases} \mathrm{Min}\,\{t \in \mathbb{T}, X_t(\omega) \in A\} & \text{si } \{t \in \mathbb{T}, X_t(\omega) \in A\} \neq \phi \\ T & \text{sinon} \end{cases}$$

Par contre on voit facilement que la v.a. suivante n'est pas un temps d'arrêt :

$$\theta(\omega) := \begin{cases} \mathrm{Max}\,\{t \in \mathbb{T}, X_t(\omega) \in A\} & \text{si } \{t \in \mathbb{T}, X_t(\omega) \in A\} \neq \phi \\ T & \text{sinon} \end{cases}$$

La caractérisation suivante des temps d'arrêt est souvent très utile :

Proposition 4.2 *Si $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une m.a. sur $(\Omega, P, \mathcal{F})$, et $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ la filtration associée, une v.a. τ est un temps d'arrêt si et seulement si*

$$[\tau(\omega) = t \quad et \quad \omega' \overset{t}{\sim} \omega] \;\;\Rightarrow\;\; \tau(\omega') = t$$

En utilisant cette caractérisation, on montre par exemple que si τ et τ' sont deux temps d'arrêt alors $\tau \wedge \tau' := \mathrm{Min}\,(\tau, \tau')$ est encore un temps d'arrêt, de même que $\tau + c$, où c est une constante.

4.3 Calcul du prix d'une option DIC

Pour calculer le prix d'une DIC, nous allons supposer comme précédemment que l'actif sous-jacent suit un modèle CRR mais nous choisissons cette fois un taux d'escompte $r = 0$ pour simplifier. Les valeurs prises par S_t lorsque $t = n\delta t$ sont donc $\{S_0 u^j d^{n-j}, j = 0, \dots, n\}$ et elles peuvent être représentées sur un arbre comme sur la figure suivantes :

Pour le calcul du prix d'une option DIC, on va faire une hypothèse supplémentaire sur le modèle du sous-jacent : on va supposer que $d = 1/u$. Cette hypothèse guarantie que les noeuds de l'arbre sont alignés horizontalement, chaque ligne étant repérée par un entier j, de telle sorte que la barrière passe exactement entre deux lignes de noeuds et puisse ainsi être repérée par une valeur de j, par exemple le numéro j de la ligne immédiatement inférieure. Si l'on désigne par h cet entier, on a :

$$h = \left[\frac{\ln \frac{H}{S_0} - n \ln d}{\ln u - \ln d}\right] \tag{4.1}$$

où $[z]$ désigne la partie entière de z, c'est-à-dire l'entier strictement inférieur au nombre z. En effet, si H était situé exactement sur une ligne de noeuds, on aurait $S_0 u^h d^{n-h} = H$, soit $u^h d^{n-h} = \frac{H}{S_0}$, soit encore en prenant le logarithme des deux membres, $h \ln u + (n-h) \ln d = \ln \frac{H}{S_0}$. D'où l'expression (4.1).

Définition : Soit $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$une m.a. CRR sur $(\Omega, P, \mathcal{F})$ pour laquelle $ud = 1$ et soit $H > 0$. La v.a. suivante est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_t)$ associée :

$$\tau_H(\omega) := \begin{cases} \text{Min}\,\{t \in \mathbb{T}, S_t(\omega) \leq H\} & \text{si } \{t \in \mathbb{T}, S_t(\omega) \leq H\} \neq \phi \\ T & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $S_t(\omega)$ est la trajectoire correspondant à l'état du monde ω, $\tau_H(\omega)$ désigne donc le premier instant qui suit le franchissement de la barrière H si cet instant précède T et il vaut T si la trajectoire ne franchit pas la barrière avant T. On vérifie facilement qu'il s'agit bien d'un temps d'arrêt en utilisant la caractérisation donnée par la proposition 4.2.

Ce temps d'arrêt permet d'exprimer par une formule la valeur à l'échéance ou paye off d'une option DIC :

Définition : Une down and in call (DIC) de prix d'exercice K, d'échéance T et de barrière H souscrite sur un actif modélisé par une m.a. CRR (S_t) a pour valeur à l'échéance :

$$\psi_T = (S_T - K)^+ \mathbb{I}_{\tau_H < T}$$

où $\mathbb{I}_{\tau_H<T}$ est la v.a. sur Ω qui vaut 1 si $\tau_H < T$ et 0 sinon.

On a vu lors des leçons précédentes comment calculer le prix d'une option $(T, \varphi(S_T))$ sur un sous-jacent $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ de type CRR : c'est la formule fondamentale (proposition 2.9). Dans ce cas le paye off $\varphi(S_T)$ est une v.a. S_T-mesurable c'est-à-dire qur $\varphi(S_T)$ est connu dès qu'on connaît la valeur atteinte par (S_t) en $t = T$. Dans le cas d'une option barrière, la valeur atteinte par (S_t) en $t = T$ ne suffit pas pour calculer le paye off, il faut en plus connaître la trajectoire suivie par S_t entre $t = 0$ et $t = T$ puisqu'il faut savoir si celle-ci a franchit la barrière ou non. Cela sigifie que la valeur de l'option à l'échéance n'est plus $\sigma(S_T)$-mesurable mais bien $\mathcal{F}_T$-mesurable. D'où la nécessité de généraliser la formule fondamentale :

Proposition 4.3 *Dans un marché financier $(S_t, B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ où S_t suit un modèle CRR, en supposant le taux d'escompte nul, le prix à l'instant $t = 0$ d'une option (T, ψ_T), où ψ_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable, est donnée par $\psi_0 = \mathbb{E}(\psi_T) = \mathbb{E}((S_T - K)^+ \mathbb{I}_{\tau_H<T}$, c'est-à-dire qu'il est égal à l'espérance, sous la probabilité de calcul, de sa fonction de paiement.*

La preuve de cette proposition consiste simplement à reprendre celle de la proposition 2.9 et vérifier que seule la $\mathcal{F}_T$-mesurabilité du paye off et non la $\sigma(S_T)$-mesurabilité a été utilisée.

Il reste cependant à calculer l'espérance $\mathbb{E}((S_T - K)^+ \mathbb{I}_{\tau_H<T}$. C'est pour faire ce calcul qu'on utilise le *principe de symétrie d'André :*

Proposition 4.4 *Le nombre de trajectoires de la marche aléatoire binaire $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ telles que $S_{n\delta t} = S_0 u^{2j-n}$ en ayant franchi la barrière $H = S_0 u^h d^{n-h}$ (on suppose $h \leq \frac{n}{2}$) est égal à $\binom{n}{j}$ si $0 \leq j < h$, à $\binom{n}{j+n-2h}$ si $h \leq j \leq 2h$ et à 0 si $j > 2h$.*

Ceci va nous permettre de calculer le prix initial d'une option DIC :

Proposition 4.5 *Une down and in call (DIC) de prix d'exercice K, d'échéance T et de barrière H souscrite sur un actif modélisé par une m.a. CRR (S_t) a pour valeur à l'échéance :*

- *Si $H \leq K$:*

$$\sum_{j=k}^{2h} \binom{n}{j+n-2h} p^j (1-p)^{n-j} (S_0 u^{2j-n} - K)$$

- *Si $K \leq H$:*

$$\sum_{j=k}^{h} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} (S_0 u^{2j-n} - K) + \sum_{j=h+1}^{2h} \binom{n}{j+n-2h} p^j (1-p)^{n-j} (S_0 u^{2j-n} - K)$$