Université de Nice
Département de Mathématiques

Année 2000-2001
DEUG MASS 2e année

Probabilités et analyse
Corrigé du contrôle du 3 novembre

I.

1. Soit a un réel strictement positif. Rappeler pour quelles valeurs de a la série de terme général a^k est convergente.
   La série $\sum a^k$ est une série géométrique. On sait qu'elle converge (vers $\frac{1}{1-a}$) lorsque $|a| < 1$ et qu'elle diverge lorsque $|a| \geq 1$.
2. Déterminer la nature de la série de terme général $\ln(1+a^k)$ pour $a \geq 1$.
   Pour $a \geq 1$, on a $\ln(1+a^k) \geq \ln 2$ car ln est une fonction croissante ; donc la série $\sum \ln(1+a^k)$ diverge puisque son terme général ne tend pas vers 0.
3. Déterminer la nature de la série de terme général $\ln(1+a^k)$ pour $0 < a < 1$.
   Pour $0 < a < 1$, on a le développement limité $\ln(1+a^k) = a^k(1+\varepsilon(a^k))$, avec $\varepsilon(a^k) \simeq 0$ dès que k est ig. Donc $\frac{\ln(1+a^k)}{a^k} \simeq 1$ dès que k est ig. Les deux suites (positives) $\ln(1+a^k)$ et a^k sont donc asymptotiques et donc les séries $\sum \ln(1+a^k)$ et $\sum a^k$ de même nature. Comme rappelé à la question 1, $\sum a^k$ est convergente lorsque $0 < a < 1$, donc il en est de même de $\sum \ln(1+a^k)$.
4. En déduire que pour $0 < a < 1$, la suite $u_n = (1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)$ admet une limite $l \geq 1$.
   La suite $u_n = (1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)$ admet une limite $l \geq 1$ si et seulement si la suite $v_n = \ln u_n$ admet une limite $L \geq 0$, car ln est une fonction continue. Or

$$v_n = \ln\big((1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)\big) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+a^k)$$

   D'après la question précédente, on en déduit que v_n est une suite convergente lorsque $0 < a < 1$ et sa limite L est positive ou nulle puisque c'est la somme d'une série à termes positifs.

II.

1. En comparant la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{k}}$ à une intégrale, montrer que

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 2(\sqrt{n+1} - 1).$$

   Comme la fonction $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante, on a, pour tout $k = 2, \dots, n+1$, la minoration $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Donc

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_1^{n+1} = 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

2. Que peut-on en déduire sur la nature de la série de terme général $1/\sqrt{k}$?
   Comme $\lim_{n\to+\infty} 2(\sqrt{n+1} - 1) = +\infty$, la minoration précédente montre que la série $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ est divergente.
3. Soit $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$. Montrer qur la suite u_n est décroissante.
   On constate que $u_{n+1} - u_n \leq 0$ car on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \frac{-1 - 2n - 2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}}$$

   donc u_n est une suite décroissante car $-1 - 2n - 2\sqrt{n(n+1)} \leq 0$ pour tout n.
4. Etudier la convergence de la suite u_n quand n tend vers l'infini.
   Comme u_n est décroissante, il suffit de montrer qu'elle est minorée pour s'assurer qu'elle est convergente. Or on a

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} \geq 2(\sqrt{n+1}) - 2 - 2\sqrt{n} \geq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 2 \geq -2.$$

III. Un étudiant répond aux 20 questions d'un test par un "oui" ou par un "non", avec la probabilité $\frac{1}{2}$ de répondre justement à chaque question. Soit X le nombre de réponses justes. Quelle est la loi de X ? Calculer $P(X=3)$.

Le nombre de réponses justes peut être modélisé par une loi binomiale $\mathcal{B}(20, \frac{1}{2})$ de paramètres $n=20$ et $p=\frac{1}{2}$, définie pour tout $k=0,\ldots,n$ par $P(X=k) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) p^k(1-p)^{n-k}$. En particulier on a

$$P(X=3) = \left(\begin{array}{c} 20 \\ 3 \end{array}\right) (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^{17} = \frac{20\,!}{3\,!17\,!}(\frac{1}{2})^{20} = \frac{3 \times 5 \times 19}{2^{18}}.$$

IV. Un jeu consiste à lancer un dé non pipé jusqu'à ce qu'on obtienne 6. Soit X le nombre d'essais nécessaires.

1. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance.

   Le nombre d'essais nécessaires peut être modélisé par une v.a. géométrique définie, pour tout entier $k \geq 0$, par $P(X=k) = \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^{k-1}$. L'espérance de cette v.a. est :

   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 0} \frac{k}{6}(\frac{5}{6})^{k-1} = \frac{1}{6}\frac{1}{(1-5/6)^2} = 6.$$

2. Soit F_X la fonction de répartition de X. Que vaut $F_X(x)$?

   La plus petite valeur prise par la v.a. X étant 1, on a $F_X(x) = 0$ pour tout $x < 1$ et comme X ne prend que des valeurs entières, on a, pour tout $x \in [k, k+1[$,

   $$F_X(x) = P(X \geq k) = P(X=1) + P(X=2) + \ldots + P(X=k)$$

   et donc

   $$F_X(x) = \frac{1}{6}\left(1 + \ldots + (\frac{5}{6})^{k-1}\right) = \frac{1}{6}\frac{1-(\frac{5}{6})^k}{1-\frac{5}{6}} = 1 - (\frac{5}{6})^k.$$

3. Montrer que si $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$, alors $P(X \leq a+b/X > a) = P(X \leq b)$.

   On a par définition des probabilités conditionnelles,

   $$P(X \leq a+b/X > a) = \frac{P(X \leq a+b, X > a)}{P(X > a)} = \frac{P(a < X \leq a+b)}{P(X > a)} = \frac{F(a+b) - F(a)}{1 - F(a)}$$

   Donc, en utilisant la question précédente,

   $$P(X \leq a+b/X > a) = \frac{(1-(\frac{5}{6})^{a+b}) - (1-(\frac{5}{6})^a)}{1-(1-(\frac{5}{6})^a)} = 1 - (\frac{5}{6})^b = F(b) = P(X \leq b).$$