Université de Nice Sophia-Antipolis
Licence L3 Mathématiques Année 2008/2009

Analyse Numérique
Corrigé du TD 5

EXERCICE 1
Méthode des approximations successives, ordre de convergence

Soient I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, $g : I \to I$ une fonction assez régulière admettant un point fixe $l \in I$ *i.e.* $g(l) = l$. On considère une suite des itérés suivante

$$\begin{cases} x_0 \in I \ \text{ donné}\,, \\ x_{n+1} = g(x_n), \ \ \forall n \geq 0\,. \end{cases} \tag{1.1}$$

a. Faire un dessin illustrant la construction de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$.

b. Calculer l'erreur $e_n = x_n - l$ et donner une condition pour que la méthode du point fixe (1.1) soit d'ordre $p \geq 1$.

On a

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x_{n+1} - l \\ &= g(x_n) - g(l) \\ &= (x_n - l)\, g'(l) + ... + \frac{(x_n - l)^{p-1}}{(p-1)!}\, g^{(p-1)}(l) + \frac{(x_n - l)^p}{p!}\, g^{(p)}(c_n)\,, \end{aligned} \tag{1.2}$$

où c_n est un réel compris entre x_n et l.
On trouve que la méthode des approximations successives converge à l'ordre p sous la condition :

$$\begin{aligned} &g^{(k)}(l) = 0\,, \forall\, k = 1, ..., p-1\,, \ \text{pour } p > 1\,, \\ &\quad \text{et} \\ &g^{(p)}(l) \neq 0\,, \ \text{pour } p \geq 1\,, \end{aligned} \tag{1.3}$$

car sous les hypothèses (1.3) on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1} - l}{(x_n - l)^p} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{p!} g^{(p)}(c_n) = \frac{1}{p!} g^{(p)}(l) \neq 0\,.$$

Cas où $p = 2$. En posant $M = \sup_{x\in I} \left|g''(x)\right|$, on peut écrire

$$\left|x_{n+1} - l\right| \leq \frac{M}{2} \left|x_n - l\right|^2,$$

ce qui peut s'écrire encore

$$\left|x_{n+1} - l\right| \leq \frac{2}{M} \left(\frac{M}{2} \left|x_n - l\right| \right)^2 .$$

Par récurrence sur n, on trouve

$$\left|x_n - l\right| \leq \frac{2}{M} \left(\frac{M}{2} \left|x_0 - l\right| \right)^{2^n} .$$

On voit que en choisissant x_0 tel que $\left|x_0 - l\right| \leq \dfrac{1}{5M}$, on obtient

$$\left|x_n - l\right| \leq \frac{2}{M} \, 10^{-2^n} .$$

Ce qui montre qu'à chaque itération le nombre de décimales exactes double en théorie.

EXERCICE 2

Formules et illustrations graphiques des méthodes itératives de recherche des zéros d'une fonction

On recherche un zéro d'une fonction régulière $f : I \to I$ où I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.

2.1 Méthode de dichotomie

Rappeler la méthode de dichotomie qui permet d'approcher ce zéro de f. Faites une illustration graphique.

La méthode de dichotomie est basée sur le théorème suivant :

Théorème 2.1. *Soit $[a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f(a)f(b) < 0$ alors $\exists\, \alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.*

On se donne un intervalle $I_0 = [a, b]$ contenant le zéro α que l'on veut approcher. La méthode de dichotomie produit une suite de sous-intervalles $I_n = [a_n, b_n]$, $n \geq 0$, avec $I_{n+1} \subset I_n$ et tel que $f(a_n)f(b_n) < 0$. En particulier, on prend $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ et pour $n \geq 0$:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{on pose } a_{n+1} = a_n \,,\ b_{n+1} = x_n & \text{si} & f(a_n)f(x_n) < 0 \,, \\ \text{ou } \ a_{n+1} = x_n \,,\ b_{n+1} = b_n & \text{si} & f(x_n)f(b_n) < 0 \,, \\ \text{et } \ x_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} \,. & & \end{array}} \tag{2.1}$$

2.2 Méthode de Newton

On considère maintenant la méthode de Newton pour rechercher ce zéro.
a. établir sa formule en utilisant un développement de Taylor ;
b. faire un dessin pour illuster la méthode.

a. *Par la formule en utilisant un développement de Taylor*
On se donne x_0. Pour $n \geq 0$, on écrit la formule de Taylor de $f(x_{n+1}$ en x_n, soit

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + (x_{n+1} - x_n)\,\varepsilon(x_{n+1})\,, \tag{2.2}$$

avec $\lim\limits_{x_{n+1} \to x_n} \varepsilon(x_{n+1}) = 0$.
On néglige le terme $(x_{n+1} - x_n)\ \varepsilon(x_{n+1})$, on suppose que $f'(x_n)$ inversible et on cherche x_{n+1} tel que $f(x_{n+1}) = 0$, d'où la méthode de Newton

$$\begin{cases} x_0 \ \text{ donné}\,, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,, \ \ \forall n \geq 0\,. \end{cases}$$

b. *Géométriquement* x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente en x_n à la courbe de f et l'axe des abscisses.

EXERCICE 3
Un exemple

3.1

Soit l'équation

$$x = e^{-x}\,, x \in [0, +\infty[\,. \tag{3.1}$$

a. On considère la méthode itérative suivante

$$\begin{cases} x_0 \in [0, +\infty[\ \text{ donné}\,, \\ x_{n+1} = e^{-x_n}, \ \ \forall n \geq 0\,. \end{cases} \tag{3.2}$$

Montrer que la méthode (3.2) **est convergente si** x_0 **est bien choisi. Donner dans ce cas l'ordre de convergence.**

Posons $g(x) = e^{-x}$.
Clairement 0 n'est pas solution de l'équation (3.1). Pour $x \in]0, +\infty[$, $g'(x) = -e^{-x}$, donc $|g'(x)| < 1$ ce qui implique que g est contractante sur $]0, +\infty[$. Comme $]0, +\infty[$ est un ouvert, le théorème du point fixe ne s'applique pas. Il faut trouver un fermé $[a, b] \subset]0, +\infty[$, tel que $g([a, b]) \subset\ [a, b]$.

Prenons $a = 1/10$ et $b = 1$. On a $g(1/10) = e^{-1/10} \leq 1$ et $g(1) = e^{-1} \geq 1/10$. On a bien $g([1/10, 1]) \subset [1/10, 1]$ par continuité de g sur $[1/10, 1]$. Comme $|g'(x)| < 1$ sur le fermé $[1/10, 1]$ de $]0, +\infty[$, on peut appliquer le théorème du point fixe. Il existe $l \in [1/10, 1]$ tel que $l = g(l)$.

Ordre de convergence
Comme $g'(c) = -e^{-c} \neq 0$, la méthode est convergente à l'ordre 1.

b. Appliquer la méthode de Newton à l'équation (3.1) **et montrer que la convergence est quadratique.**

Pour appliquer la méthode de Newton à l'équation (3.1), on pose $h(x) = x - e^{-x}$. Comme $h'(x) = 1 + e^{-x} \neq 0$ sur $]0, +\infty[$, la méthode de Newton pour l'équation $h(x) = 0$ s'écrit

$$\begin{cases} x_0 \in [\frac{1}{10}, 1] \text{ donné}\,, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{h(x_n)}{h'(x_n)}\,, \quad \forall n \geq 0\,, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} x_0 \in [\frac{1}{10}, 1] \text{ donné}\,, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n - e^{-x_n}}{1 + e^{-x_n}}\,, \quad \forall n \geq 0\,. \end{cases}$$

Ordre de convergence
La fonction $h(x) = x - e^{-x}$ est $\mathcal{C}^2$. Soit α la racine de h que l'on souhaite approcher par la méthode de Newton. Cette méthode peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné}\,, \\ x_{n+1} = \phi(x_n)\,, \quad \forall n \geq 0\,, \end{cases}$$

où ϕ est donnée par

$$\phi(x) = x - \frac{h(x)}{h'(x)}\,.$$

On a

$$\phi'(x) = 1 - \frac{(h'(x))^2 - h(x)h''(x)}{(h'(x))^2} = \frac{h(x)h''(x)}{(h'(x))^2}\,.$$

et donc

$$\phi'(\alpha) = \frac{h(\alpha)h''(\alpha)}{(h'(\alpha))^2} = 0\,,$$

car $h(\alpha) = 0$.

De l'expression de la dérivée seconde

$$\phi''(x) = \frac{(h'(x))^3 h''(x) + h(x)h^{(3)}(x)(h'(x))^2 - 2h(x)h'(x)(h''(x))^2}{(h'(x))^4}\,,$$

il vient

$$\phi''(\alpha) = \frac{h''(\alpha)}{h'(\alpha)} = -\frac{e^{-\alpha}}{1+e^{-\alpha}} \neq 0\,.$$

Par suite, d'après l'exercice 1, la convergence de la méthode de Newton est quadratique pour l'équation $x = e^{-x}\,, x \in [0, +\infty[$.

3.2

Montrer que l'équation $x = -\ln(x)\,, x \in]0, +\infty[$ admet une solution unique. Montrer que la méthode itérative

$$\begin{cases} x_0 \in]0, +\infty[\ \text{ donné}\,, \\ x_{n+1} = -\ln x_n\,, \quad \forall n \geq 0\,, \end{cases} \tag{3.3}$$

diverge. Proposer une méthode d'approximation de la solution.

Posons $f(x) = -\ln(x)$.
La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa fonction dérivée est $x \mapsto f'(x) = -1/x$. La fonction f est donc décroissante sur $]0, +\infty[$. Comme $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et $f(1) = 0$, le point fixe de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$ est localisé dans le segment ouvert $]0, 1[$.
Sur le segment ouvert $]0, 1[$, on a $|f'(x)| > 1$, même en prenant un intervalle fermé $[a, b] \subset]0, 1[$, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ construite à partir de la formule (3.3) diverge. En effet, pour $n \geq 0$, il existe un réel ξ entre x_n et l tel que

$$x_{n+1} - l = f(x_n) - f(l) = f'(\xi)\,(x_n - l)\,,$$

et donc

$$\Big|x_{n+1} - l\Big| = \Big|f'(\xi)\,(x_n - l)\Big| > \Big|x_n - l\Big|\,.$$

Par récurrence on obtient

$$\Big|x_n - l\Big| > \Big|x_{n-1} - l\Big| > \ldots > \Big|x_1 - l\Big| > \Big|x_0 - l\Big|\,.$$

D'où la méthode itérative (3.3) diverge.

Une autre méthode d'approximation de la solution
On cherche à résoudre $x = -\ln(x)$ sur $]0, +\infty[$. En prenant l'exponentielle de cette dernière égalité on obtient

$$x = e^{-x}\,, x \in [0, +\infty[\,.$$

C'est l'équation (3.1) du début de cet exercice. La méthode (3.1) permet d'approcher la solution de l'équation $x = -\ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.

EXERCICE 4
Points fixes attractif, répulsif

Soient I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, $\phi : I \to I$ une fonction $\mathcal{C}^1(I)$ admettant un point fixe $a \in I$ *i.e.* $\phi(a) = a$. On considère une suite des itérés suivante

$$\begin{cases} x_0 \in I \ \text{ donné}\,, \\ x_{n+1} = \phi(x_n)\,, \quad \forall n \geq 0\,. \end{cases} \tag{4.1}$$

a. On suppose que $|\phi'(a)| < 1$.
Soit k tel que $|\phi'(a)| < k < 1$. Montrer que :

$$\exists\, h > 0 \ \ \forall x \ \in [a-h, a+h]\,, \ \ |\phi'(x)| \leq k\,. \tag{4.2}$$

$x \mapsto \phi'(x)$ est continue en a :

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, h(\varepsilon) > 0 \ \ \forall x \ \in [a-h, a+h]\,, \ \ |\phi'(x) - \phi'(a)| \leq \varepsilon\,.$$

En prenant $\varepsilon = k - |\phi'(a)| > 0$, on a

$$\exists\, h > 0 \ \ \forall x \ \in [a-h, a+h]\,, \ \ |\phi'(x) - \phi'(a)| \leq k - |\phi'(a)|\,.$$

Par inégalité triangulaire, on trouve

$$\exists\, h > 0 \ \ \forall x \ \in [a-h, a+h]\,, \ \ |\phi'(x)| \leq |\phi'(a)| + (k - |\phi'(a)|)\,. \tag{4.3}$$

Ce qui donne le résultat demandé.

Prouver que $\phi([a-h, a+h]) \subset \ [a-h, a+h]$ et que $\forall x_0 \in [a-h, a+h]$, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ donnée par la formule (4.1) converge vers a.

On a
- ϕ est continue sur $[a-h, a+h]$;
- ϕ est dérivable sur $[a-h, a+h]$;
- $\forall x \in [a-h, a+h]\,, \ \ |\phi'(x)| \leq k$.

D'après le théorème des accroissements,

$$\forall x \in [a-h, a+h]\,, \ \ |\phi(x) - \phi(a)| \leq k\, |x-a| \leq 1 \times h\,. \tag{4.4}$$

Comme $\phi(a) = a$, la relation (4.3) s'écrit

$$\forall x \in [a-h, a+h]\,, \ \ |\phi(x) - a| \leq h\,,$$

ce qui signifie que

$$\phi([a-h, a+h]) \subset \ [a-h, a+h]\,.$$

Convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ *dans* $[a-h,a+h]$ *pour* $x_0 \in [a-h,a+h]$
L'intervalle $[a-h,a+h]$ est un fermé de $\mathbb{R}$, c'est un espace complet. Comme $\phi([a-h,a+h]) \subset [a-h,a+h]$ et ϕ est une application contractante de rapport $0<k<1$, la suite des itérés ayant pour valeur initiale $x_0 \in [a-h,a+h]$ converge vers le point $a \in [a-h,a+h]$.

b. On suppose $|\phi'(a)| > 1$**.**
Peut-on utiliser l'algorithme (4.1) **pour approcher** a **?**

Puisque $|\phi'(a)| > 1$, si applique l'algorithme (4.1) à ϕ pour approcher a, la méthode diverge (voir l'exercice 3.2).

On montre à présent que l'on peut quand même utiliser l'algorithme (4.1) *pour approcher* a*.*

Comme la fonction $x \mapsto \phi'(x)$ est continue en a,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, h(\varepsilon) > 0 \ \ \forall x \in [a-h,a+h]\,, \ \ -\varepsilon + \phi'(a) \leq \phi'(x) \leq \varepsilon + \phi'(a)\,. \tag{4.5}$$

• Si $\phi'(a) > 0$, alors on prend $\varepsilon = \dfrac{\phi'(a)}{2}$ et donc $\dfrac{\phi'(a)}{2} \leq \phi'(x) \leq \dfrac{3\phi'(a)}{2}$ *i.e.*

$$\exists\, h > 0 \ \ \forall x \in [a-h,a+h]\,, \ \ \phi'(x) > 0 \ \text{ tout comme } \phi'(a)\,. \tag{4.6}$$

• Si $\phi'(a) < 0$, alors on prend $\varepsilon = -\dfrac{\phi'(a)}{2}$ et donc $\dfrac{3\phi'(a)}{2} \leq \phi'(x) \leq \dfrac{\phi'(a)}{2}$ *i.e.*

$$\exists\, h > 0 \ \ \forall x \in [a-h,a+h]\,, \ \ \phi'(x) < 0 \ \text{ tout comme } \phi'(a)\,. \tag{4.7}$$

Tout ceci pour dire que $\exists\, h > 0$ tel que ϕ' a le même signe que $\phi'(a) \neq 0$ sur $[a-h,a+h]$.
Sur $[a-h,a+h]$, ϕ est donc une bijection et on peut définir ϕ^{-1}.
Comme $(\phi^{-1})'(\phi(a)) = 1/\phi'(a)$ et $\phi(a) = a$, on a $(\phi^{-1})'(a) = 1/\phi'(a)$. De $(\phi^{-1})'(a) = 1/\phi'(a) < 1$, on peut appliquer le **a.** de cet exercice à ϕ^{-1} pour approcher a.

c. On suppose maintenant que $|\phi'(a)| = 1$**.**
En prenant $\phi(x) = \sin(x), x \in [0,\pi/2], a = 0$ **puis** $\phi(x) = \mathbf{sh}(x), x \in [0,+\infty[, a = 0$**, conclure.**

Cas où $\phi(x) = \sin(x), x \in [0,\pi/2], a = 0$
On a $\phi(0) = 0$ donc 0 est point fixe de $\phi(x) = \sin(x)$ sur $[0,\pi/2]$. On a également $|\phi'(0)| = \cos(0) = 1$ et $\forall\, x \in]0,\pi/2], |\phi'(x)| = |\cos(x)| < 1$, donc la méthode des itérés successifs converge $\forall\, x_0 \in]0,\pi/2]$ et mÃªme pour $x_0 = 0$.

Cas où $\phi(x) = \mathrm{sh}(x), x \in [0, +\infty[, a = 0$
On a $\phi(0) = 0$ donc 0 est point fixe de $\phi(x) = \mathrm{sh}(x)$ sur $[0, +\infty[$. On a aussi $|\phi'(0)| = \mathrm{ch}(0) = 1$. Enfin $\forall\, x \in]0, +\infty[, |\phi'(x)| = \mathrm{ch}(x) > 1$, donc la méthode des itérés successifs diverge $\forall\, x_0 \in]0, +\infty[$.

En conclusion, le cas où le point fixe a vérifie $|\phi'(a)| = 1$ est douteux *i.e.* dans lequel l'on ne peut pas *a priori* déterminer le comportement de la suite des itérés successifs.

Vocabulaire
Soit a un point fixe d'une fonction ϕ *i.e* $\phi(a) = a$. On suppose que ϕ est $\mathcal{C}^1$ au moins.
Si $|\phi'(a)| < 1$ **alors on dit que** a **est un point fixe** *attractif*.
Si $|\phi'(a)| > 1$ **alors on dit que** a **est un point fixe** *répulsif*.