Partiel d'analyse numérique

Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est interdit. La durée de l'examen est de 2h

Exercice 1 On pose

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1, \\ 3 & 8 & 4 \end{matrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1) Résoudre le système linéaire $Ax = y$ par la méthode du pivot de Gauss. On prendra soin d'indiquer clairement à chaque étape les opérations faites sur les lignes.
2) Donner la décomposition LU de la matrice A (L triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et U triangulaire supérieure).

Exercice 2
1) On considère la fonction f définie sur $[-\pi,\ \pi]$ par

$$f(x) = \frac{x}{2} - \sin x + \alpha,$$

où α est un nombre réel donné, strictement positif et tel que $\pi/6 - \sqrt{3}/2 + \alpha < 0$ (et donc a fortiori $-\pi/2 + \alpha < 0$).
i) Étudier la fonction f sur $[-\pi,\ \pi]$ et déterminer le nombre de ses racines.
ii) Calculer l'intervalle obtenu après la première étape de la méthode de dichotomie sur f, partant de l'intervalle $[-\pi,\ \pi]$ et en déduire la racine vers laquelle la méthode converge.
2) Soit maintenant la fonction $g(x) = x^3 - x^2$.
i) Étudier g sur $\mathbb{R}$.
ii) On applique une méthode de dichotomie à partir d'un intervalle quelconque contenant 0 et 1. Vers quelle racine converge-t-on ?

Exercice 3 On veut appliquer la méthode de Newton à $f(x) = x^2 - 1$. On pose donc

$$N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

1) Donner les racines de f et l'ensemble de définition de N_f.
2) Montrer que si $x > 0$ alors $N_f(x) \geq 1$.
3) On prends $x_0 > 0$. Prouver que la suite donnée par $x_{k+1} = N_f(x_k)$ est bien toujours définie et strictement positive.
4) Montrer que $N_f'(x)$ est croissante sur $[1,\ \infty[$ et majorée par $1/2$.
5) En déduire que la suite définie au 3) converge vers 1.

Exercice 4 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $y \in \mathbb{R}^n$. On appelle T la partie triangulaire inférieure de A et $R = A - T$. On veut appliquer la méthode de Gauss-Seidel au système linéaire $Ax = y$, ce qui conduit à la suite $x_{k+1} = T^{-1}\,y - T^{-1}\,R\,x_k$.
On suppose ici que $TR = RT$.
1) Rappeler pourquoi ceci implique que R et T sont réductibles (trigonalisables) dans une même base.
2) Donner les valeurs propres de $T^{-1}\,R$ et conclure que la méthode converge.
3) Montrer que pour tout x_0, x_n (le nième terme de la suite) est déjà égal à la solution de $Ax = y$.
4) Pour $n = 2$, verifier que l'on a $TR = RT$ si et seulement si $R = 0$ ou $T = \lambda Id$. Quelle est la situation en dimension n ?