Examen d'analyse numérique

Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est interdit. La durée de l'examen est de 3h.

Exercice 1 Soient

$$A = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{matrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) Résoudre le système $A\,x = y$.
2) La matrice A est-elle décomposable sous forme LU ? Si oui donner sa décomposition.

Exercice 2 On se place sur l'intervalle $[0,\ 1]$.
1) Donner les expressions des 3 polynômes d'interpolation de Lagrange de degré 2 (donc pour les points $0,\ 1/2,\ 1$).
2) Donner les expressions des 3 polynômes d'interpolation de Bernstein de degré 2.
3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in C([0,1])$. On pose

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(k/n) + (nx-k)\,(f((k+1)/n) - f(k/n)))\ \mathbb{I}_{[k/n,\ (k+1)/n[}.$$

Prouver que

$$\sup_{[0,\ 1]} |f - f_n| \leq \omega(1/n),$$

où ω est le module de continuité de f dont on donnera la définition.
4) On suppose maintenant que $f \in C^2([0,\ 1])$, montrer qu'il existe C telle que $\forall n$

$$\sup_{[0,\ 1]} |f - f_n| \leq \frac{C}{n^2}.$$

Exercice 3 On désire approcher $\int_0^1 f(x)\,dx$ par l'expression suivante

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\ f(k/n).$$

1) On suppose que f est continue sur $[0,\ 1]$. Rappeler la définition de continuité uniforme et pourquoi f est également continue uniformément sur $[0,\ 1]$.
2) Montrer que S_n converge vers $\int_0^1 f(x)\,dx$.
3) On suppose désormais que $f \in C^\infty([0,\ 1])$.
i) Prouver que

$$\int_0^1 f(x)\,dx - S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} (f(x) - f(k/n))\,dx.$$

ii) Montrer que

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} (f(x) - f(k/n))\,dx = \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(\frac{k+1}{n} - y\right)\ f'(y)\,dy.$$

4) Prouver que

$$\left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(\frac{k+1}{n} - y\right)\ f'(y)\,dy - \frac{f'(k/n)}{2n^2} \right| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{2n^3},$$

et que

$$\left| \frac{1}{2n} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f'(x)\,dx - \frac{1}{2n^2} f'(k/n) \right| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{2n^3}.$$

5) En conclure que si $f(0) = f(1)$ alors

$$\left| \int_0^1 f(x)\,dx - S_n \right| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{n^2}.$$

On remarquera dans ce cas que $\int_0^1 f'(x)\,dx = 0$.

Exercice 4 On s'intéresse à l'équation différentielle suivante

$$\frac{dx}{dt} = (x(t))^2 \quad x(0) = 1.$$

On choisit une méthode d'Euler explicite et l'on définit donc la suite $u_n(k)$ par récurrence avec

$$u_n(0) = 1, \quad n(u_n(k+1) - u_n(k)) = (u_n(k))^2,$$

pour tout entier n fixé.

1) Démontrer que la suite $u_n(k)$ est croissante en k.

2) On définit $v_n(k) = u_n(k)\,(1 - k/n)$ pour $k < n$.

i) Prouver que

$$v_n(k+1) \leq v_n(k) + \frac{u_n(k)}{n}\,(v_n(k) - 1).$$

ii) En déduire par récurrence que $v_n(k) \leq 1$ pour tout $k < n$.

3) Prouver qu'il existe $C > 0$ telle que $\forall n$, $\forall k < n/2$

$$|u_n(k)| \leq C.$$

4) On pose $x(t) = 1/(1-t)$. Vérifier que x est bien une solution de l'équation différentielle.

5) Prouver que pour $k < n - 1$

$$n(x((k+1)/n) - x(k/n)) = (x(k/n))^2 \times \left(1 - \frac{1}{n-k-1}\right).$$

6) Conclure qu'il existe C' telle que $\forall n$, $\forall k < n/2$

$$|u_n(k) - x(k/n)| \leq \frac{C'}{n}.$$

On démontrera tout d'abord que

$$|u_n(k+1) - x((k+1)/n)| \leq \frac{C}{n}|u_n(k) - x(k/n)| + \frac{2C^2}{n^2}.$$