

MATHEMATIQUES L3 – 2007/2008

T.D. d'Analyse numérique

Feuille n°1

Exercice 1 : Soit $M = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer si M est diagonalisable sur \mathbb{R} et la diagonaliser le cas échéant.

Exercice 2 : Résoudre l'équation $AX = Y$ par la méthode du pivot de Gauss, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et X est un vecteur de \mathbb{R}^3 .

Exercice 3 : On note $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On définit les normes matricielles, subordonnées à des normes vectorielles, comme étant

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

On rappelle que les 3 normes usuelles sont

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

Par ailleurs, le rayon spectral $\rho(A)$ d'une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est par définition

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_i|; \lambda_i \text{ valeurs propres de } A, i = 1, \dots, n\}.$$

a) Montrer que $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.

b) Montrer que $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

c) Montrer que $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$, où A^* est l'adjoint de A .

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. Soit en outre $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive, continue et nulle en dehors d'un compact, vérifiant $\int_{\mathbb{R}} \Phi(x) dx = 1$.

On définit la suite de fonctions $(\Phi_n)_n$ par $\Phi_n(x) = n\Phi(nx)$.

On rappelle que le produit de convolution de deux fonctions g et h est défini par : $(g \star h)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-y)h(y)dy = \int_{\mathbb{R}} g(y)h(x-y)dy$.

- a) Montrer que pour tout n , $\Phi_n \star f$ est bien définie.
- b) Prouver que pour tout n , $\int_{\mathbb{R}} \Phi_n(x) dx = 1$.
- c) Montrer que $(\Phi_n \star f)_n$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .