Feuille 2 d'Analyse Numérique

Exercice 1 Décomposition de Cholesky.
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique $A^* = A$ et définie positive, soit

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_i\, a_{ij}\, x_j > 0, \quad \text{pour tout } x = (x_1, \dots, x_n) \neq 0.$$

On veut montrer qu'il existe une unique matrice triangulaire inférieure L tq $l_{ii} > 0$, $\forall i$, et

$$A = L\, L^*.$$

1) Écrire A sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & b_n \\ b_n^* & a_{nn} \end{pmatrix},$$

avec $b \in \mathbb{R}^{n-1}$, a_{nn} le coefficient correspondant de A et A_{n-1} une matrice de $M_{n-1}(\mathbb{R})$, symétrique, définie, positive.
2) Supposant que $A_{n-1} = L_{n-1}\, L_{n-1}^*$ avec L_{n-1} triangulaire inférieure et de diagonale positive. Trouver L que l'on cherchera sous la forme

$$L = \begin{pmatrix} L_{n-1} & 0 \\ c^* & \alpha_n \end{pmatrix},$$

pour obtenir une décomposition pour A.
3) Prouver par récurrence que toute matrice A symétrique, définie positive, admet une décomposition de Cholesky.
4) Ecrire l'algorithme permettant de calculer les coefficients de L en fonction de A.

Exercice 2 Décomposition LU par méthode du pivot de Gauss.
Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

1) Décrire la suite des opérations sur les lignes pour mettre en place la méthode du pivot sur A.
2) En déduire la décomposition LU de A.

Exercice 3 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont toutes les matrices sous-diagonales sont inversibles. Calculer le nombre d'opérations nécessaires pour décomposer A en LU.