Feuille 4 d'Analyse Numérique

Exercice 1 Soit $f(x) = \arctan x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On cherche la racine $y = 0$ par la méthode de Newton. On définit donc

$$S_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

et on s'intéresse à la suite définie par

$$x_{n+1} = S_f(x_n).$$

On suppose que

$$\arctan x_0 > \frac{2x_0}{1 + x_0^2}.$$

1) Montrer que si

$$\arctan |x| > \frac{2|x|}{1 + x^2},$$

alors $|S_f(x)| > |x|$.
2) Étudier la fonction $\phi(x) = (1 + x^2) \arctan x - 2x$.
3) En déduire que si

$$\arctan |x| > \frac{2|x|}{1 + x^2},$$

alors

$$\arctan |S_f(x)| > \frac{2|S_f(x)|}{1 + (S_f(x))^2}.$$

4) Conclure que dans ce cas $|x_k|$ tend vers ∞.

Exercice 2 On veut encore appliquer la méthode de Newton mais cette fois à un polynôme f. On suppose qu'il existe y tq $f(y) = 0$ et que y est une racine d'ordre l, *i.e.*

$$f(y) = f'(y) = \ldots = f^{l-1}(y) = 0 \quad \text{mais} \quad f^l(y) \neq 0.$$

1) Montrer que l'on peut définir l'application S_f de façon continue et dérivable sur un voisinage de y même si $l > 1$ et que l'on a toujours $S_f(y) = y$.
2) Prouver que $S'_f(y) = 1 - 1/l$.
3) En déduire qu'il existe $\eta > 0$ et $\mu < 1$ tel que si $|x - y| < \eta$ alors $|S_f(x) - y| < \mu\,|x - y|$.
4) Pour x_0 tq $|x_0 - y| < \eta$, conclure que

$$|x_k - y| \leq \eta\,\mu^k.$$

Exercice 3 Soit $f \in C(I, \mathbb{R})$ avec $I = [a,\ b]$ et $f(a) < 0,\ f(b) > 0$.
1) Estimer le nombre de fois (en fonction de ε) où l'on aura besoin de calculer une valeur de f pour approcher une racine à ε près.
2) On modifie la méthode dichotomie en divisant à chaque fois l'intervalle en trois parties au lieu de deux. Reprendre la question précédente dans ce cas et comparer les deux résultats.