Feuille 8 d'Analyse Numérique

Exercice 1 On veut résoudre numériquement l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)), \quad \text{pour } t \in [0,\ 1], \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R},$$

où $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ avec f bornée sur $\mathbb{R}$. On prend pour cela la discrétisation suivante pour approcher $dx/dt(k/n)$

$$\frac{n}{2}\,(y_n(k+1) - y_n(k-1)).$$

En $k = 0$ on prend simplement $n(y_n(1) - y_n(0))$.
1) Écrire les relations définissant la suite $y_n(k)$ pour k entre 0 et n.
2) Montrer que cette méthode est consistante d'ordre 2.
3) Prouver que

$$|y_n(k) - x_0| \leq \frac{k}{n}\,\|f\|_\infty.$$

4) On suppose qu'il existe une solution $x(t) \in C^2([0,\ 1])$ à l'équation. On note $e_k = |y_n(k) - x(k/n)|$ l'erreur ; vérifier que

$$e_{k+1} \leq e_{k-1} + \left| \frac{2}{n} f(y_n(k)) - \int_{(k-1)/n}^{(k+1)/n} f(x(t))\,dt \right|.$$

5) Faire un développement de Taylor à l'ordre 2 et en déduire qu'il existe une constante C telle que

$$e_{k+1} \leq e_{k-1} + \frac{C}{n^3}.$$

6) Conclure que la méthode converge à l'ordre 2.