Test de compléments d'analyse numérique

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation dans les programmes des fonctions matricielles preprogrammées de scilab est interdite sauf pour le produit matriciel ou indication contraire.

Exercice 1 On définit pour une matrice A et un vecteur y les suites suivantes

$$x_0 = 0, \quad p_0 = y, \quad x_1 = y, \quad p_1 = y,$$

$$\text{et pour } k \geq 1 \quad p_{k+1} = y - A\,x_k + \left(\frac{\|y - A\,x_k\|_2^2}{\|y - A\,x_{k-1}\|_2^2} \right) p_k,$$

$$x_{k+1} = x_k + \left(\frac{\|y - A\,x_k\|_2^2}{p_{k+1}^t\,A\,p_{k+1}} \right) p_{k+1}.$$

1) Écrire une fonction $[x, p] = iteree(A, y, n, xk, pk, xk1)$ qui renvoie dans x et p les valeurs

$$p = y - A\,xk + \left(\frac{\|y - A\,xk\|_2^2}{\|y - A\,xk1\|_2^2} \right) pk, \quad x = xk + \left(\frac{\|y - A\,xk\|_2^2}{p^t\,A\,p} \right) p.$$

On n'utilisera *pas* la fonction norm.
2) Écrire une fonction $xk = kiteree(A, y, n, k)$ retournant la valeur x_k de la suite définie par récurrence dans l'énoncé. On pourra utiliser la fonction du 1).
3) Écrire une fonction $xk = gradconj(A, y, n, e)$ qui retourne la valeur x_k telle que $\|x_{k-1} - x_k\|_2 \leq e$. On n'utilisera *pas* non plus ici la fonction norm.

Exercice 2 Methode de relaxation. Soit A une matrice, D sa diagonale, L la partie strictement triangulaire inférieure et U la partie strictement triangulaire supérieure. Pour tout $\theta > 0$ on définit la suite

$$x_0 = 0, \qquad (D + \theta L)\,x_{k+1} = \theta\,y - (\theta U + (\theta - 1)\,D)\,x_k.$$

1) Justifier pourquoi un point fixe de cette suite est une solution de $A\,x = y$.
2) Écrire une fonction $x = iteree(A, y, n, xk, theta)$ permettant de calculer l'itérée successive. On n'utilisera évidemment pas la fonction inv.
3) Écrire un programme $[xk, theta0] = kitereeopt(A, y, n, k, m)$ qui renvoie la k-ième itérée x_k pour la valeur $theta0$ qui donne la plus petite erreur $\|x_k - x_{k-1}\|_2$ parmi tous les $\theta = 1/m, \ldots, 2$.