Partiel d'analyse numérique

Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est interdit. La durée de l'examen est de 1h30. Les questions marquées d'une étoile sont plus difficiles.

Exercice 1
Soit $f \in C([0,\ 1])$, $f \geq 0$, on veut étudier la méthode d'intégration approchée

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{f(i/n)\, f((i+1)/n)}.$$

1) Rappeler les définitions de continuité et continuité uniforme.
2) Pour $a, b, c \geq 1$ montrer que

$$|\sqrt{a\, b} - c| \leq a\,|b-c| + c\,|a-c|.$$

3) On suppose que $f \geq 1$, prouver que

$$I_n \longrightarrow \int_0^1 f(x)\, dx, \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

4) On définit la suite de fonction $f_n(x) = \frac{1}{\pi n} \sin^2(\pi n x)$. Vérifier que $\|f_n'\|_\infty \leq 1$ et calculer I_n et $\int_0^1 f_n(x)\, dx$.
5)* Indiquer en justifiant si la proposition suivante est vraie ou fausse

$$\exists C > 0,\ \forall f \in C^1([0,\ 1]) \text{ avec } f \geq 0, \qquad \left| I_n - \int_0^1 f(x)\, dx \right| \leq \frac{C}{n}\, (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

Exercice 2 Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$. Pour tout pas de temps $1/8 > \delta > 0$, on définit une suite d'approximation de la solution de l'équation différentielle $x'(t) = f(x(t))$, $x(0) = 0$ par

$$x_0 = 0,\ x_1 = \delta\, f(0), \qquad \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\delta} = f(x_n) \quad \text{pour } n \geq 2.$$

1) Donner l'erreur de consistance de la méthode (on se limitera au cas général $n \geq 2$).
2) On suppose que $\|f\|_\infty < \infty$, $\|f'\|_\infty \leq 1$, $\|f''\|_\infty < \infty$ et on pose $e_n = |x_n - x(n\delta)|$. Pour $n \geq 2$, montrer qu'il existe $C > 0$ tq

$$e_{n+1} \leq e_{n-1} + 2\delta e_n + \frac{C}{n^2}.$$

3)* Prouver que $e_n \leq u_n$ où u_n est définie par

$$u_{n+1} = u_{n-1} + 2\delta u_n, \quad u_0 = \frac{C}{n^2}, \quad u_1 = \delta^2 \|f'\|_\infty + \frac{C}{n^3}.$$

4) Calculer u_n en le cherchant sous la forme $\alpha\lambda^n + \beta\mu^n$ et conclure qu'il existe C' tq

$$e_n \leq \frac{C'}{n^2}\, (1 + 4\delta)^n.$$