ERREUR DANS LA MÉTHODE DU POINT MILIEU

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0,1]$, montrons que

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}\right)\right| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{24n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Par la relation de Chasles

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx$$

montrons donc que

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}\right)\right| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{24n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Or pour tout $k \in \{0,..,n-1\}$,

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}\right) = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}\right)dx,$$

on doit donc montrer que

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}\right)\right)dx\right| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{24n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Utilisons la *formule de Taylor Lagrange* sur chaque intervalle $[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]$ avec $k \in \{0,..,n-1\}$:
Soit $k \in \{0,..,n-1\}$:
f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0,1]$ donc pour tout $x \in [\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]$ il existe $c_k(x) \in]\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}[$ tel que

$$f(x) = f\left(\tfrac{k}{n}+\tfrac{1}{2n}\right) + \left(x-\left(\tfrac{k}{n}+\tfrac{1}{2n}\right)\right)f'\left(\tfrac{k}{n}+\tfrac{1}{2n}\right) + \frac{\left(x-\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}\right)\right)^2}{2!}f''\left(\tfrac{k}{n}+\tfrac{1}{2n}\right) + \frac{\left(x-\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}\right)\right)^3}{3!}f^{(3)}(c_k(x))$$

et en intégrant on a :

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}\right)\right)dx = \frac{1}{24n^3}f''\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}\right) + \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{\left(x-\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}\right)\right)^3}{3!}f^{(3)}(c_k(x))\,dx$$

d'où par inégalité triangulaire

$$\left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}\right)\right)dx\right| \leq \left|\frac{f''\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}\right)}{24n^3}\right| + \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left|\frac{\left(x-\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}\right)\right)^3}{3!}f^{(3)}(c_k(x))\right|dx$$

or $\left|\frac{f''\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}\right)}{24n^3}\right| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{24n^3}$ et pour tout $x \in [\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]$ $\left|x-\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}\right)\right| \leq \frac{1}{2n}$ et $\left|f^{(3)}(c_k(x))\right| \leq \left\|f^{(3)}\right\|_\infty$
donc

$$\left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}\right)\right)dx\right| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{24n^3} + \frac{\left\|f^{(3)}\right\|_\infty}{48n^4}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}\right)\right)dx\right| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{24n^2} + \frac{\left\|f^{(3)}\right\|_\infty}{48n^3}$$

on conclut par inégalité triangulaire.