Ch. 4. Éléments d'analyse des schémas aux différences finies. Version abrégée.

§1. Introduction :

. Pb d'évolution abstrait : Pb de Cauchy

$$\begin{cases} \text{E.D.P.: } \partial_t u + Au = f \equiv 0 \text{ (pour simplifier)}, t \in]0,T[\quad (1), \\ \text{C.I.: } u(\cdot,0) = u_0(\cdot) \quad T < +\infty \quad (2), \end{cases}$$

. Ex. ① $Au = c\,\partial_x u$, $x \in \mathbb{R}$ é'q. d'advection, $\left(\begin{smallmatrix}\text{e.g.}\\ c>0\end{smallmatrix}\right)$ (1')

② $Au = -\Delta u$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ é'q de la chaleur

et $\begin{cases} u|_{\partial\Omega} = 0, \text{ ou} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$ C.L. Dirichlet, ou Neumann si $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^N$.

. Pour simplifier, pb 1 D, $x_j = j\Delta x$, $j \in \mathbb{Z}$, $t_n = n\Delta t$ $u_j^n \simeq u(x_j, t_n)$, et é'q. d'advection (1'). Donc A linéaire à coeff^ts constants. On suppose :

. Pb (1')(2) bien posé dans H : [ex. $H = L^2(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R})$]

i.e. $\forall u_0 \in H$, $\exists!$ solution $u : [0,T] \to H$

$\forall t \in [0,T]$, $\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_H \le K \|u_0 - v_0\|_H$.

On note : $u(t) = S(t)u_0$; $v(t) = S(t)v_0$,

$S(t) \circ S(s) = S(s) \circ S(t) = S(s+t)$; $S(0) = Id$.

. Schéma explicite à 3 points :

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n), \forall j \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (3)$$

conservatif : $H(u,v,w) = v - \lambda(g(v,w) - g(u,v))$, (4)

où $g(\cdot,\cdot)$: flux numérique, et $\lambda = \Delta t/\Delta x$ (4')

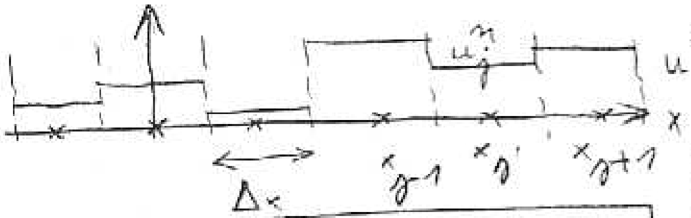
. On note :

$H_\Delta : \underline{u^n} := (u_j^n)_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell^2, \ell^\infty, \ell^1$ (exemples) $\mapsto \underline{u^{n+1}} := (u_j^{n+1})_{j\in\mathbb{Z}}$

où u_j^{n+1} est donné par (3).

. De même, $u^n \mapsto u_h^n := \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j^n \chi_j$ (5)

où $\chi_j(x) = \begin{cases} 1 \text{ sur }]x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[\\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$



$u^n_h \in V_h := \{$fonctions en escalier (5)$\} \subset H$ $\left(\ell^2\right.$

on note $\boxed{u^{n+1}_h = S_h(u^n_h) \quad (6)}$

$\left\{ \begin{array}{l} \|u^n_h\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|u^n\|_{\ell^p} \\ \text{ex. } p = 2, +\infty, 1 \\ := \Delta x \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |u^n_j|^p \right)^{1/p}, \text{ si } p<+\infty \end{array} \right.$

- Condition initiale discrète :

$$u_{0,h}(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_{0,j}\, \chi_j(x), \text{ ex. } u_{0,j} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_0(x)\,dx \quad (6')$$

on suppose $u_{0,h} = R_h(u_0)$, et $R_h \circ R_h = R_h$.

§2. Consistance. Ordre. Eq. équivalente

Déf. 1. Le schéma (3) est dit consistant (resp. d'ordre p en x et q en t) si pour toute solution régulière u de l'EDP (1'), l'erreur de troncature

$$\boxed{\Delta t\ \varepsilon(x,t)} := u(x,t+\Delta t) - H(u(x-\Delta x,t), u(x,t), u(x+\Delta x,t)) \quad (7)$$

vérifie :

$$\Delta t\ \varepsilon(x,t) = \begin{cases} o(\Delta t), \text{ quand } \Delta t \to 0, \text{ avec } r = \frac{\Delta t}{\Delta x} = c^{te}, \\ (\text{resp.} = O((\Delta x)^p + (\Delta t)^q) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad , \end{cases}$$

soit pour (x,t) fixé qlcq, soit pour $\|\Delta t\ \varepsilon(\cdot,t)\|_H$.

thm 1. Eq. équivalente à l'ordre supérieur. Ex. pour un schéma du 1er ordre

(i) Le schéma (3) est consistant (pour l'EDP (1)) ssi $\forall u,\ g(u,u) = 0$.

(ii) Dans ce cas, si u est régulière, et si $r = c^{te}$, alors

$$\begin{aligned} \Delta t\ \varepsilon(x,t) &= u(x,t+\Delta t) - H(u(x-\Delta x,t), u(x,t), u(x+\Delta x,t)) \\ &= -(\Delta t)^2 \partial_x\left(\beta(r)\partial_x u(x,t)\right) + O((\Delta t)^3) \end{aligned} \quad (8)$$

(iii) Le schéma est d'ordre ≥ 2 ssi $\beta = 0$. Si ce n'est pas le cas, le même schéma est d'ordre ≥ 2 pour l'équation équivalente à l'ordre 2 :

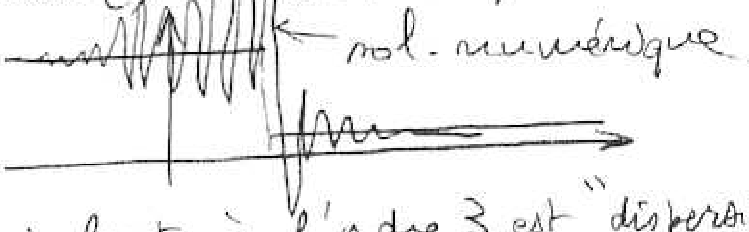
$$\partial_t u + c\,\partial_x u = \Delta t\, \partial_x\left(\beta(r)\partial_x u\right) \quad (9)$$

Rem. - si $\beta < 0$, le schéma (3) est instable, car l'EDP (9) et la (C.I.) (2) forment un pb mal posé

. si $\beta > 0$:

diffusion numérique du schéma

. si le schéma (3) est d'ordre 2, ex. Lax-Wendroff



car l'éq. équivalente à l'ordre 3 est "dispersive" :

$$\partial_t u + c\,\partial_x u \simeq (\Delta t)^2\, \partial_{xxx} u$$

§3 - stabilité. Convergence

. On a donc

$$\begin{cases} \forall n \geq 0, \quad u_h^{n+1} = S_h(u_h^n) \in V_h \subset H & (3),(5),(6) \\ u_h^0 = u_{0,h} = R_h u_0 \in H, \quad R_h \circ R_h = R_h & (6') \end{cases}$$

. Déf 2 : Le schéma (6),(6') est convergent (pour $\|\cdot\|_H$) ssi $\forall t \leq T$, $\forall u_0 \in H$,

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta t \to 0 \\ \Delta t/\Delta x = \lambda \text{ fixé}}} \| S(t) u_0 - (S_h)^n u_h^0 \|_H = 0 \qquad (10)$$

(****)

. Déf 3 : Le schéma (6),(6') est stable (pour $\|\cdot\|_H$) ssi $\forall T > 0$, $\exists K = K_T > 0$, indépendante de $\Delta x, \Delta t$ tq $\forall \Delta t$, $\forall n$ tq $n\Delta t \leq T$, $\forall u_0 \in H$

(****)

$$\begin{cases} \|(S_h)^n u_h^0\| \leq K \|u_0\|_H, \\ \text{i.e. } \|(S_h)^n R_h\|_{\mathcal{L}(H)} \leq K \quad \text{(norme d'opérateur)} \end{cases} \qquad (11)$$

En pratique (critère de Von Neumann) : $\|S_h\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1 + C\Delta t$, et $\|R_h\|_{\mathcal{L}(H)} \leq C'$.

. <u>Thm 2 : Thm d'équivalence de Lax</u> (***)

Si le pb (1)(2) est bien posé dans H et si le schéma (6),(6') est <u>consistant</u> (pour $\|\cdot\|_H$), alors il est <u>convergent</u> pour $\|\cdot\|_H$ <u>ssi</u> il est <u>stable</u> pour $\|\cdot\|_H$.
Si de plus il est d'ordre p en x et q en t, alors

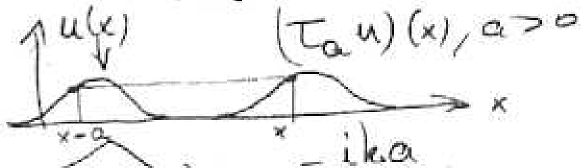
$$\sup_{0\le m\le T/\Delta t} \|u(\cdot, m\,\Delta t) - u_h^m(\cdot)\|_H \le CT\left((\Delta x)^p + (\Delta t)^q\right) \quad (12)$$

(l'erreur globale) $\le$ " " " .

§ 4. Analyse de Fourier de l'équation exacte

. On pose $\hat{u}(k) := \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ik.x}\, u(x)\,dx$, <u>e.g. ici $N=1$</u>

. Alors $\widehat{\dfrac{du}{dx}}(k) = ik\,\hat{u}(k)$;



$\forall a \in \mathbb{R}$, $(\tau_a u)(x) := x-a$; $\widehat{\tau_a u}(k) = e^{-ika}\,\hat{u}(k)$

. $\left\{\begin{array}{l}\hat{u}(k,t) = \int e^{-ik.x}\, u(x,t)\,dx \\ \text{(Transformée de Fourier en } x\text{)}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{\partial_t u}(k) = \partial_t(\hat{u}(k,t))$

. <u>Rappel</u> : $\forall u, v \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $(u,v)_{L^2} := \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\,\overline{v(x)}\,dx = \dfrac{1}{(2\pi)^N}(\hat{u},\hat{v})_{L^2}$

. donc $\forall u \in L^2(\mathbb{R}^N)$,

$$\|u\|_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\|\hat{u}\|_{L^2}.$$

. Donc $\forall u$ solution de $\partial_t u + c\,\partial_x u = 0$ (1'),

on a

$$\widehat{\partial_t u} + c\,\widehat{\partial_x u} = \hat{0} = 0 \Leftrightarrow \partial_t \hat{u} + ikc\,\hat{u} = 0 \quad . \quad (13)$$

Donc $\hat{u}(k,t) = \exp(-ikct)\,\hat{u}(k,0)$

<u>Déf 4 : On appelle</u> <u>symbole de l'équation</u> (1') :

$$\underline{G(k,\Delta t) = \exp(-ikc\Delta t)}, \ \forall k \in \mathbb{R}, \forall \Delta t \ge 0 : \quad (14)$$

$\forall u$ solution de (1'), $\underline{\hat{u}(k, t+\Delta t) = G(k,\Delta t)\,\hat{u}(k,t)}$

. Exo : . quel est le symbole de l'équation : $\partial_t u + c\,\partial_x u = \partial_{xx} u$?

. montrer que le pb (1)(2) est bien posé dans $H = L^2(\mathbb{R})$ ssi le symbole $G(k,\Delta t)$ associé à (1) vérifie
$\forall T>0,\ \sup\{|G(k,\Delta t)|,\ k\in\mathbb{R},\ \Delta t \geq 0\} := C_T < +\infty$.

§5. Analyse de Fourier d'un schéma aux différences finies

. Ex. pour l'équation (1') et le schéma décentré (bon sens).

$$u_j^{n+1} = (1-cr)\,u_j^n + cr\,u_{j-1}^n, \quad r = \frac{\Delta t}{\Delta x} = c^{te} \qquad (15)$$

. Symbole du schéma :

a) 1ère méthode : on suppose que $u_j^0 = e^{ikx_j} = e^{ikj\Delta x} := u_0(x_j)$ (u_0 est une "onde plane" si $N>1$). Alors, par récurrence

$\forall n,\ u_j^{n+1} = (1-cr+cr\,e^{-ik\Delta x})\,u_j^n := G_h(k,\Delta x)\,u_j^n$.

$$\Rightarrow \forall n,\ \underbrace{u_j^n} = \underbrace{(G_h(k,\Delta x))^n}_{\text{symbole du schéma : } (\ast\ast\ast\ast)} \cdot e^{ikj\Delta x} := \underbrace{v_n}\cdot\underbrace{w_j} \qquad (16)$$

b) 2ème méthode : on cherche les solutions à variables séparées du schéma : $u_j^n = v_n \cdot w_j$ (16), [ou de l'EDP $u(x,t) = v(t)\,w(x)$ (17)]. On les cherche bornées sur $\mathbb{R}$.

$v_{n+1}\,w_j = u_j^{n+1} = ((1-cr)\,w_j + cr\,w_{j-1})\,v_n$. Donc

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = (1-cr) + cr\,\frac{w_{j-1}}{w_j} = c^{te} := 1-cr+cr\,e^{-ik\Delta x} := G_h(k,\Delta x),$$

car $\underline{\left|\frac{w_{j-1}}{w_j}\right| = 1}$: on pose $\frac{w_{j-1}}{w_j} := e^{-ik\Delta x}$, $k\in\mathbb{R}$.

c) 3ème méthode : on pose $u_h^n(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j^n\,\chi_j(x)$. (5)

Alors, d'après (15), en multipliant par $\chi_j(x)$, puis $\sum_{j\in\mathbb{Z}}$:

$$u_h^{n+1}(x) = (1-cr)\,u_h^n(x) + cr\,\underbrace{\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_{j-1}^n\,\chi_j(x)}$$

$$= (1-cr)\,u_h^n(x) + cr\,u_h^n(x-\Delta x) \quad !!$$

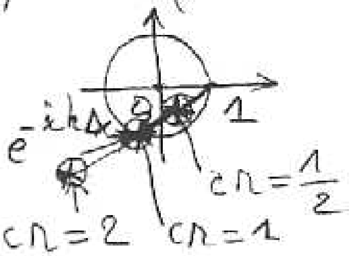
Donc $u_h^{n+1} = (1-cr)\,u_h^n + cr\,(\tau_{\Delta x}u_h^n)(x)$!!

Donc $\hat{u}_h^{n+1}(k) = (1-cr)\,\hat{u}_h^n(k) + cr\,e^{-ik\Delta x}\,\hat{u}_h^n(k)$

$$\hat{u}_h^{n+1}(k) = G_h(k,\Delta x)\,\hat{u}_h^n(k) \qquad (17)$$

- Pour le schéma décentré, $G_h(k,\Delta t) = 1 + c\lambda(e^{-ik\Delta x} - 1)$

Exemples:



$G_h(k,\Delta t)$, pour $c\lambda = 2$

Alors $\{|G_h(k,\Delta t)| \leq 1, \forall k, \forall \Delta t\}$
si $0 \leq c\lambda \leq 1$: condition CFL, et schéma décentré "dans le bon sens".

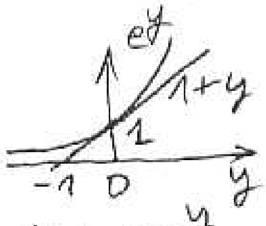
- Condition de stabilité de Von Neumann

Thm 3 :

Le schéma (3)(5)(6) est stable dans $L^2(\mathbb{R})$ si son symbole vérifie
$$\forall T>0, \exists K = K_T > 0 ; \forall \Delta t, \sup_{k\in\mathbb{R}} |G_h(k,\Delta t)| \leq 1 + K\Delta t \quad (18)$$

Dém. $\|u_h^n\|_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \|\hat{u}_h^n\|_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \|(G_h(k,\Delta t))^n \hat{u}_h^0\|_{L^2}$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \cdot \left(\sup_{k\in\mathbb{R}} |G_h(k,\Delta t)|\right)^n \cdot \|\hat{u}_h^0\|_{L^2}$$
$$= \left(\sup_{k\in\mathbb{R}} |G_h(k,\Delta t)|\right)^n \|u_h^0\|_{L^2}$$
$$\leq (1+K\Delta t)^n \|u_h^0\|_{L^2} \leq (e^{K\Delta t})^n \|u_h^0\|_{L^2}.$$
$$\leq e^{Kn\Delta t} \|u_h^0\|_{L^2} \leq e^{KT} \|u_h^0\|_{L^2}. \quad \square$$



$1+y \leq e^y$

- On admettra

thm 4 : Le schéma (6) est consistant, et d'ordre p en x, q en t, si
$$\forall k \in \mathbb{R}^N, \left|\frac{G(k,\Delta t) - G_h(k,\Delta t)}{\Delta t}\right| = O((\Delta x)^p + (\Delta t)^q). \quad (19)$$
symbole : de l'éq exacte, du schéma

§6. Stabilité L^∞. Monotonie. Stabilité BV

- Déf. Le schéma (6) est dit monotone si
$$\{\forall j, u_j^n \leq v_j^n\}, \text{ i.e. } \{u^n \leq v^n\} \Rightarrow \{S_h(u^n) := u^{n+1} \leq S_h(v^n) := v^{n+1}\} \quad (20)$$

- si le schéma est linéaire, ceci $\Leftrightarrow$ à $\{u^n \geq 0\} \Rightarrow \{S_h u^n \geq 0\}$.
- Exemple : le schéma décentré dans le bon sens est monotone ssi $0 \leq c\lambda \leq 1$ (CFL).
- Si un schéma est monotone et si $\forall x, u_0(x) \in [m, M]$ alors $\forall j$, $u_j^0 = u_{0,j} := \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_0(x)\,dx \in [m, M]$, et par monotonie, $\forall n \geq 0, \forall j$, $m \leq u_j^n \leq M$: stabilité L^∞

Thm 4 : (Crandall-Tartar). Soit $S : L^1 \to L^1$, qui préserve l'intégrale : $\forall u \in L^1$, $Su \in L^1$ et $\int Su = \int u$
Alors S préserve l'ordre ssi S est une contraction de L^1 dans L^1 : $\forall u, v \in L^1$, $\int |Su - Sv| \leq \int |u - v|$

Dém. cf TD. $\square$

- Application : supposons que $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, et que le schéma (6) soit monotone et conservatif. Alors (exo)

(i) $u_j^0 = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_0(x)\,dx \underset{(j\to+\infty)}{\longrightarrow} 0$; $\Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_j^0| < +\infty$

(ii) $\forall n \geq 0$, $u_j^n \underset{(j\to+\infty)}{\longrightarrow} 0$.

(iii) $\forall n \geq 0$, $\Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j^{n+1} = \Delta x \sum_{\in\mathbb{Z}} u_j^n = \dots = \Delta x \sum_{\in\mathbb{Z}} u_j^0 = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,dx$

(iv) $\forall n \geq 0$, $\Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_j^{n+1}| \leq \Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_j^n| \leq \dots \leq \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|\,dx$

(v) $\forall n \geq 0$, $\Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_j^{n+1} - v_j^{n+1}| \leq \Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_j^n - v_j^n| \leq \dots \leq \Delta x \sum_j |u_j^0 - v_j^0|$

(vi) En particulier, si $v_j^n := u_{j-1}^n$,
$\forall n \geq 0$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}| \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_j^n - u_{j-1}^n|$
La Variation totale de la solution discrète ne croît pas au cours du temps : un schéma monotone conservatif ne crée pas d'oscillations.