Université de Nice Sophia-Antipolis 2007 - 2008
L3 Mass. Calcul différentiel

Remarque pour le contrôle du 17/10/2007. Corrigé.

Révisez la dérivation des fonctions composées

Exemple de dérivée directionnelle ou de dérivée d'une fonction composée

Soit Φ une fonction C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Réécrire la définition de la dérivée $\partial_y \Phi(x_0, y_0)$.

On suppose maintenant que $y_0 = x_0$ et on pose $\varphi(x) := \Phi(x, x)$. [On poserait de même $\psi(y) := \Phi(y, y)$].

Calculer $\varphi'(x)$ pour tout x. On conseille de revenir à la définition de cette dérivée, et de l'écrire comme une dérivée directionnelle, dans une direction qu'on précisera. [On pourra tracer dans le plan x, y l'ensemble des (x, x) quand x décrit $\mathbb{R}$, et pour un tel point (x, x) tracer les directions de dérivation correspondant respectivement à $\varphi'(x)$, à $\partial_x \Phi(x, x)$ et à $\partial_y \Phi(x, x)$].

En déduire l'expression de $\varphi'(x)$ en fonction des dérivées partielles ci-dessus. Finalement, comparer les fonctions $\varphi(.)$ et $\psi(.)$

Réponse :

$$\partial_y \Phi(x_0, y_0) = lim_{h \to 0} h^{-1}(\Phi(x_0, y_0 + h) - \Phi(x_0, y_0)).$$

$$\varphi'(x) = lim_{h \to 0} h^{-1}(\Phi(x + h, x + h) - \Phi(x, x))$$

est la dérivée directionnelle de Φ au point (x, x), dans la direction $v = (1, 1)$. Elle est donc différente des dérivées partielles $\partial_x \Phi(x, x)$ et $\partial_y \Phi(x, x)$, qui sont des dérivées directionnelles, respectivement dans les directions $v_1 := e_1 := (1, 0)$ et $v_2 := e_2 := (0, 1)$. On a d'après le cours, §3, page 5, avec ici $v = (1, 1)$

$$\varphi'(x) =< grad\Phi(x, x), v >= \partial_x \Phi(x, x).1 + \partial_y \Phi(x, x).1$$

Ensuite, les fonctions $x \mapsto \varphi(x) = \Phi(x, x)$ et $y \mapsto \psi(y) = \Phi(y, y)$ sont les mêmes. seul le nom de la variable change, mais comme toujours c'est une variable **muette**!!

Finalement, on pourrait aussi écrire

$$\varphi(x) = \Phi(u(x,y), v(x,y)),$$

avec $u(x,y) = v(x,y) = x$, et utiliser le Thm de dérivation des fonctions composées, cf Notes de Cours, p 8 . On obtiendrait

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dx}(x) &= \partial_u\Phi(u(x,y), v(x,y)).\partial_x u(x,y) + \partial_v\Phi(u(x,y), v(x,y)).\partial_x v(x,y)\\ &= \partial_x\Phi(x,x).1 \;+\; \partial_y\Phi(x,x).1\end{aligned}$$

qui est bien la même expression que ci-dessus, car ici

$$\boldsymbol{\partial_{\mathbf{u}}\Phi(\mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{v}(\mathbf{x},\mathbf{y})) = \partial_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y})}$$

désigne la dérivée partielle de Φ **par rapport à la première variable** : x ou u, dérivée calculée au même point $(u(x,y), v(x,y)) = (x,x)$.