L3 Mass
Calcul différentiel
2009/2010

TD 5. Corrigé partiel

Exercice 1. Minimiser la fonction : $f(x,y,z) = x^2+y^2$ sur le domaine

$$D = \left\{(x,y)\,;\, \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = 1\right\}.$$

Corrigé. On remarque d'abord que f est continue et le domaine D compact (fermé comme image réciproque de l'ensemble$\{0\}$ par la fonction continue g, et borné car contenu dans le carré $[-c,c]\times[-c,c]$ avec $c = max(a,b)$). On calcule d'abord les vecteurs gradients : $\nabla f(x,y,z) = (2x,2y)$ et $\nabla g(x,y,z) = (4x^3,4y^3)$ en un point quelconque (x,y) de D. On vérifie au passage que le vecteur ∇g n'est pas nul, donc est un système libre, pour (x,y) non nul, donc tout point (x,y) de D, car $(0,0)\notin D$.
On peut donc peut appliquer le Théorème des extrema liés en tout point $(x,y)\in D$. Si $(x,y,z)\in D$ est solution du problème, alors nécessairement $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda\nabla g(x,y).$$

On obtient donc nécessairement :

$$2x = 4\lambda x^3 \tag{1}$$
$$2y = 4\lambda y^3. \tag{2}$$

On discute ensuite en détail les différentes possibilités, en supposant e.g. que $a>b>0$. Faites-le ...

Exercice 2. Corrigé. On reprend l'exercice 2 de la Feuille 4 : on veut donc minimiser la fonction

$$f(x,y) = 5x^2+2x^2-2xy-8x-2y+3$$

sur le domaine

$$D = \{(x,y)\,;\, g_1(x,y) := -x\le 0, g_2(x,y) := -y\le 0, g_3(x,y)\le 0\},$$

avec $g_3(x,y) := x+y-3$. D'abord, f étant continue et D compact, l'existence d'au moins un point de minimum et un point de maximum global de f sur D est assurée. On va appliquer le "Théorème des extrema liés", avec les trois contraintes du type inégalité: $g_i(x,y) := -x\le 0,\ i=1,2,3.$

Cherchons d'abord à carac tériser les **points de minimum local de** f sous ces trois contraintes : on cherche un point (x, y) et trois scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 0$ tels que

$$\nabla f(x,y) - \sum_{i=1,2,3} \lambda_i \nabla g_i = 0,$$

avec

$$\forall i = 1,2,3,\ g_i(x,y) \leq 0 \text{ et } \lambda_i g_i(x,y) = 0.$$

Or

$$\nabla f(x,y) = (\partial_x f(x,y), \partial_y f(x,y)) = (10x - 2y - 8, 4y - 2x - 2).$$

On a donc :

$$10x - 2y - 8 = -\lambda_1 + \lambda_3 \tag{3}$$

$$4y - 2x - 2 = -\lambda_2 + \lambda_3. \tag{4}$$

Cas 1 : $g_i(x,y) = 0,\ i = 1,2,3$. Donc $(x, y \in Int(D)$. Dans ce cas, on retrouve que
$\nabla f(x,y) = (0,0)$, i.e; $(x,y) = (1,1)$. On a vérifié dans ce cas (TD 4, exercice 5), que ce point est bien l'unique point de minimum global de f, non seulement sur D, mais sur $\mathbb{R}^2$ tout entier, et il appartient bien à l'intérieur de D. Normalement, on s'attend donc à ce qu'il n'y ait pas d'autre point de minimum global de f sur D.

Cas 2-1 : $g_1(x,y) = 0, g_2(x,y)$ et $g_3(x,y) < 0$. Alors $x = 0$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, et $\lambda_1 < 0$, sinon on est ramené au cas précédent. D'où

$$-2y - 8 = -\lambda_1 + \lambda_3 = -\lambda_1 > 0, \tag{5}$$

$$4y - 2 = -\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \tag{6}$$

avec $0 < y < 3$ (sinon g_1 ou $g_3 = 0$ en (x,y)). Donc $y = 2/4 = 1/2$, donc, dans la première équation, $-2y - 8 = -\lambda_1 > 0$, ce qui est impossible.

On raisonne de même (faites-le) dans le
Cas 2-2 : $g_2 = 0, g_1$ et $g_3 < 0$ au point (x,y), d'où $y = 0$; $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, et $\lambda_2 < 0$ ...

et au
Cas 2-3 : $g_3 = 0, g_1$ et $g_2 < 0$ au point (x,y), d'où $x + y = 3$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, et $\lambda_3 < 0$ ...

On passerait au cas où deux des contraintes $g_i \leq 0$ sont des égalités. Notons que les trois egalités ne peuvent pas avoir lieu en même temps

: vérifiez-le géométriquement!

Cas 3-1 : $g_1 = g_2 = 0$ et $g_3 < 0$ au point (x, y), d'où $x = y = 0$; $\lambda_3 = 0$, $\lambda_1 \leq 0$ et $\lambda_2 \leq 0$.
On a donc:

$$-8 = -\lambda_1, \tag{7}$$

$$-2 = -\lambda_2, \tag{8}$$

ce qui implique λ_1 et $\lambda_2 > 0$, ce qui est impossible.
Cas 3-2 : $g_2 = g_3 = 0$ et $g_1 < 0$ au point (x, y), d'où $y = 0, x = 3 - y = 3$; $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \leq 0$ et $\lambda_3 \leq 0$.
On a donc:

$$30 - 8 = 22 = \lambda_3, \tag{9}$$

$$-8 = -\lambda_2 + \lambda_3, \tag{10}$$

ce qui implique $-\lambda_2 + \lambda_3 < 0$ (acceptable), mais $\lambda_3 > 0$, ce qui est impossible.
Enfin, toujours pour le cas d'un minimum, on a le dernier cas possible:
Cas 3-3 : $g_3 = g_1 = 0$ et $g_2 < 0$ au point (x, y), d'où $x = 0, y = 3 - x = 3$; $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \leq 0$ et $\lambda_3 \leq 0$.
On a donc:

$$-6 - 8 = -14 = -\lambda_1 + \lambda_3, \tag{11}$$

$$10 = \lambda_3, \tag{12}$$

ce qui implique encore $\lambda_3 > 0$: impossible. On a donc trouvé le seul point de minimum global de f sur D : le point $(1, 1)$.

Recherche d'un point de maximum global de f sur D. On applique la même méthode : **seul** change le **signe des λ_i.** Exercice: reprendre tous les cas précédents, avec cette fois un signe positif pour les λ_i et comparer avec le corrigé de l'exercice 5, Feuille 4. Par exemple le cas 3-3 ci-dessus devient :

$$-6 - 8 = -14 = -\lambda_1 + \lambda_3, \tag{13}$$

$$10 = \lambda_3, \tag{14}$$

avec cette fois : $g_3 = g_1 = 0$ et $g_2 < 0$ au point (x, y), d'où
$x = 0, y = 3 - x = 3$; $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_3 \geq 0$.
cette fois, on obtient :
$\lambda_3 = 10 > 0$ et $-14 = -\lambda_1 + 10$, d'où $\lambda_1 = 24 > 0$. On en déduit que le point $x = 0, y = 3$ est un point possible de maximum (local) de f sur D. On vérifie ensuite ne comparant avce les autres candidats possible si c'est ou non un (le ?) point de maximum **global** de f sur

D. Attention : toutes ces conditions sont seulement nécessaires, tant qu'on n'a pas **tout** vérifié.

3. Soit l'équation

$$2y^3x^2 - 2xy^2 - xy - y^2 = 1.$$

a) Montrer que cette équation définit de façon implicite x en fonction de y : $x = \phi(y)$ avec ϕ de classe C^1 au voisinage de $y_0 = 1$ et $x_0 = \phi(1) \in \mathbb{Z}$.
b) Calculer $\phi'(1)$ et $\phi''(1)$.

Corrigé. On vérifie d'abord que $f(x_0, y_0) = f(2, 1) = 0$. Ensuite, on vérifie que $\partial_x f(x_0, y_0) = 4xy^3 - 2y^2 - y = 5 \neq 0$ en ce point. On peut donc appliquer le Théorème des fonctions implicites pour exprimer localement (attention!) x en fonction de y : il existe φ de classe C^1 au voisinage de $y = 1$ telle que
$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(y)$,
avec $\varphi(1) = 2$ et $f(\varphi(y), y) = 0$. En dérivant l'égalité ci-dessus par rapport à y, on obtient :
$\partial_x f(\varphi(y), y)\, \varphi'(y) + \partial_y f(\varphi(y), y) = 0$.
Or $\partial_y f(x, y) = 6y^2x^2 - 4xy - x - 2y = 12$ au point $(2, 1)$. Donc pour $y = 1$ on obtient : $\varphi'(1) = -12/5$.
En dérivant encore une fois, on obtient:
$\partial_x f(\varphi(y), y)\, \varphi"(y) + \partial^2_{xx} f(\varphi(y), y)\, (\varphi'(y))^2$
$+ 2\partial^2_{xy} f(\varphi(y), y)\, \varphi'(y) + \partial^2_{yy} f(\varphi(y), y) = 0$.
En calculant toutes ces dérivées partielles de f en $(2, 1)$ on obtient finalement : $\varphi"(1) = 754/125$.

4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(u, v) = (u^2 + 2v, 2v^2 - u)$. Quel est l'ensemble des points où cette fonction est localement inversible, d'inverse C^1?

Corrigé. D'après le Théorème donné en cours, on peut inverser la fonction $f : (u, v) \to (y_1, y_2) = (f_1(u, v), f_2(u, v))$ *localement* i. e. dans un ("petit") voisinage de tout point (x, y) où la matrice Jacobienne

$$\begin{pmatrix} \partial_u f_1 & \partial_v f_2 \\ \partial_u f_2 & \partial_v f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & 2 \\ -1 & 4v \end{pmatrix}$$

est inversible, i.e. où son déterminant Jacobien vérifie :

$$\Delta = 8uv + 2 \neq 0,$$

et la fonction inverse est (*localement*) C^1. Par contre, e.g. au point $(u_0, v_0) = (1/2, -1/2)$, où cette condition est violée, $f = (f_1, f_2)$ n'est pas inversible : vérifier en posant $u = u_0 + h\,, v = v_0 + k$ que si on se donne $y := (y_1, y_2)$ au voisinage de $(y_{1,0}, y_{2,0}) = (f_1(u_0, v_0), f_2(u_0, v_0))$, *il n'existe pas* de couple (u, v) solution de $(y_1, y_2) = f(u, v)$ si $y_1 - y_{1,0} + y_2 - y_{2,0}) < 0$.