Université de Nice Sophia-Antipolis 2009 - 2010
L3 Mass. Calcul différentiel

Contrôle du 20/10/2009

Durée : 1H 15. Documents autorisés : aucun pour la question 1, ensuite une page recto-verso, calculettes interdites

1. Question de cours
A. Soit f une fonction de Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Qu'est-ce qu'un point de minimum local a de f dans Ω? Un point de minimum local est-il nécessairement un point de minimum global? Réciproque?

B. On suppose que f est différentiable au point $a = (a_1, \dots, a_n)$. Ecrire le développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de ce point. En retranchant $f(a)$ aux deux membres de ce DL1, donner une condition nécessaire pour que a soit un point de minimum local de f sur Ω. Donner une condition suffisante pour que a soit un point de minimum local de f sur Ω.

C. Que dit le lemme de Schwarz?

2. Etudier la fonction $f(x,y) = \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0,0) = 0$. Est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Est-elle C^2? Justifiez votre réponse. Donner si c'est possible un développement limité à l'ordre 2 de f à l'origine.

3. Calculer les extrema (s'il y en a) et les points d'extremum correspondants (?) de la fonction

$$f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 - 2xy - 8x - 2y + 3$$

sur le domaine $\mathbb{R}^2$. On pourra chercher d'abord les points critiques de f et examiner si ces points sont ou non des points de minimum ou de maximum local. Que pensez-vous du reste dans le DL2 de f en un tel point?

4. Identité d'Euler pour les fonctions homogènes. Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On suppose f homogène de degré α, i.e.

$$(1) \qquad \forall x, y, \forall\, \lambda > 0, f(\lambda x,\, \lambda y) = \lambda^\alpha\, f(x,y).$$

Montrer d'abord en revenant e.g. à la définition de $\partial_x(\lambda x, \lambda y)$ que $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont des fonctions homogènes, dont on précisera le degré (on pourra poser $h = \lambda h'$).
Ensuite, en dérivant les deux membres de (1) par rapport à λ et en détaillant l'application du théorème de dérivation des fonctions composées, montrer qu'on obtient finalement:

$$\forall x, y,\ x\partial_x f(x,y)\ +\ y\partial_y f(x,y) = \alpha\, f(x,y).$$