Université de Nice Sophia-Antipolis 2010 - 2011
L3 Mass. Calcul différentiel

Contrôle du 26/10/2010

Durée : 1H30 minutes. Documents autorisés : aucun pour la question 1, ensuite une page recto-verso, calculettes interdites

1. Question de cours

A. Donner la définition d'une fonction f, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, différentiable en un point a , et écrire son développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de ce point. On suppose que f admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1..n$, au point a . Est-elle différentiable en ce point ?

B. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On suppose que f est différentiable au point $a \in \mathrm{Int}(A)$ et que a est un point de maximum local pour f sur A. Que peut-on en déduire sur le gradient de f en a ? Donner une idée de la démonsration de ce résultat. Enfin, est-ce que cette condition nécessaire est suffisante ?

C. Dans la question B, si f est C^2, que peut-on dire de sa matrice Hessienne au point a ?

2. Soit $\Phi : t \in \mathbb{R} \mapsto u = \Phi(t) = (u_1(t), u_2(t))$ et
$F : u = (u_1, u_2) \mapsto F(u_1, u2) \in \mathbb{R}$ deux fonctions C^1.

A) Montrer que la fonction composée $F \circ \Phi$ est différentiable en tout point, et donner l'expression de sa différentielle $D(F \circ \Phi)(t_0)$ en un point t_0 quelconque, et si nécessaire donner les dimensions de la matrice correspondante.

B) En déduire l'expression de la dérivée de la fonction $f : t \mapsto F(t, t)$ en un point t_0 quelconque, en fonction des dérivées partielles de F (en quel point ?)

C) Rappeler la définition de la dérivée $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}}(u)$ de F en un point u dans une direction $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ quelconque. Comparer les directions $\mathbf{v}$ correspondant aux trois dérivées : $\partial_{u_1} F(t_0, t_0)$, $\partial_{u_2} F(t_0, t_0)$ et $f'(t_0)$.

D) Est-ce que F est différentiable en un point $(u_1^0, u_2^0) := (t_0, t_0)$? Si oui, donner son DL 1 en ce point et en déduire un équivalent de $(F(t_0 + h, t_0 + h) - F(t_0, t_0))$ quand $h \to 0$.

E) En vous inspirant des TD et des questions précédentes, donner **toutes** les solutions C^1 de l'équation :

$$\partial_x f(x, y) + \partial_y f(x, y) \equiv 0,$$

en justifiant votre réponse. On pourra poser :

$$(u, v) = \phi(x, y) := (x + y, x - y).$$

3. On considère la fonction $f(x, y) = y^m \sin \frac{x}{y}$ si $y \neq 0$ et $f(0, y) = 0$, où $m \geq 2$ est un entier. On suppose d'abord que $m \geq 3$, puis que $m = 2$. Etudier dans les deux cas la continuité, l'existence et la continuité éventuelle(s) des dérivées partielles du premier ordre de f en tout point de $\mathbb{R}^2$, et dire dans chaque cas si f admet un DL 1 à l'origine, en justifiant votre réponse et en explicitant ce DL 1 s'il existe.