Université de Nice Sophia-Antipolis 2010 - 2011
L3 Mass. Calcul différentiel

Feuille TD 2 : Corrigé partiel

1: Devoir à rédiger. On considère la fonction :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que cette fonction admet une dérivée directionnelle $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$ à l'origine dans toute direction $\mathbf{v}$ et donner sa valeur. Montrer qu'en particulier les deux dérivées partielles $\partial_x f(0,0)$ et $\partial_y f(0,0)$ sont nulles.

En supposant provisoirement que f est différentiable, donner son développement limité à l'ordre 1 à l'origine.
En considérant le cas particulier où $x = y^3$, montrer que la fonction

$$\theta(x,y) := \frac{1}{||(x,y)||}.(f(x,y) - f(0,0) - Df_{(0,0)}.(x,y))$$

ne tend pas vers 0 quand $(x,y) \to (0,0)$.

En considérant le même cas particulier, montrer que pour toute constante λ la courbe d'équation $x = \lambda y^3$ est une courbe de niveau de f. Pensez-vous que f est continue à l'origine? Conclusions : répondez aux questions suivantes :

a) est-ce que f est continue à l'origine?
b) est-ce que f admet un développement limité d'ordre 1 à l'origine?
c) est-ce que f est différentiable à l'origine?
d) est-ce que $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont continues à l'origine?

Corrigé. Voir un corrigé partiel dans les notes de cours, Chapitre 1. On vérifie facilement que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 - \{0,0)\}$. Ensuite, on montre directement que f admet une dérivée directionnelle à l'origine dans toute direction $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, en étudiant la limite quand $h \to 0$ de

$$h^{-1}\left[f(0 + hv_1, 0 + hv_2) - f(0,0)\right]$$

et en montrant que cette limite est nulle pour tout (v_1, v_2), **attention! y compris quand** $v_1 = 0$, car alors le numérateur est nul pour tout h, donc la fraction $\frac{h^4.0}{h^6.v_2^6}$ a une limite nulle quand $h \to 0$. En particulier, on a : $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0)\bar{0}$, et donc $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Donc pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, la dérivée directionnelle à l'origine $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$ existe et est nulle. Par contre, on voit que que f n'est pas continue à l'origine, car e.g. pour tout y, $f(y^3, y) \equiv 1/2$ ne tend pas vers $f(0,0) = 0$ quand $y \to 0$ et que plus généralement pour tout λ f est constante et égale à $\lambda/(1+\lambda^2)$. Donc toute courbe $\{x = \lambda y^3\}$ est une courbe de niveau de f.

En étudiant le même cas particulier où e.g. $x = y^3$, on voit que f n'est pas différentiable à l'origine, car si elle l'était, son gradient à l'origine étant nul, la quantité

$$\theta(x,y) = \frac{1}{||(x,y)||}\,[f(x,y)-f((0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)] = \frac{f(x,y)}{||(x,y)||} = \frac{1}{2\,\sqrt{2y^6}},$$

qui devrait tendre vers 0 quand $(x,y) \to (0,0)$, tend vers l'infini, donc ne tend pas vers 0 dans ce cas particulier où pourtant Donc,

(a) f n'est pas continue à l'origine (on l'a vu directement)
(b) f n'admet pas un DL1 à l'origine (idem: $\theta(x,y)$ ne tend pas vers 0 quand ...)
(c) f n'est pas différentiable à l'origine (idem : elle n'a pas de DL1 ...). D'ailleurs, si elle l'était, elle serait continue à l'origine, ce qui n'est pas.
(d) $\partial_x f$ et $\partial_y f$ ne sont pas continues à l'origine, sinon f serait différentiable, ce qui n'est pas.

2. Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On pose $f(x,y) = F(u(x,y),v(x,y))$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Calculez $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ au point (x_0,y_0) en fonction de $\frac{\partial F}{\partial u}$ et $\frac{\partial F}{\partial v}$ au point $(u_0,v_0) := (u(x_0,y_0),v(x_0,y_0))$, dans le cas où :
(i) $u(x,y) = x+y$, $v(x,y) = x-y$,
(ii) $u(x,y) = x^2-y^2$, $v(x,y) = 2xy$,
(iii) $u(x,y) = x+y$, $v(x,y) = x-y$.

D'après le Thm de dérivation des fonctions composées, f est de classe C^1 en tout point et on a e.g.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0,y_0) = \frac{\partial F}{\partial u}\,(u_0,v_0)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\,(x_0,y_0) + \frac{\partial F}{\partial v}\,(u_0,v_0)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\,(x_0,y_0)\;,$$

où $(u_0,v_0) := (u(x_0,y_0),v(x_0,y_0))$. Dans les trois cas, les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ sont évidentes, d'où par exemple dans le cas (ii)
$\frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0,y_0) = 2x_0\,\frac{\partial F}{\partial u}\,(u_0,v_0) + 2y_0\,\frac{\partial F}{\partial v}\,(u_0,v_0)$,
$\frac{\partial f}{\partial y}\,(x_0,y_0) = -2y_0\,\frac{\partial F}{\partial u}\,(u_0,v_0) + 2x_0\,\frac{\partial F}{\partial v}\,(u_0,v_0)$,
et dans le cas (iii) :
$\frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0,y_0) = \frac{\partial F}{\partial u}\,(u_0,v_0)+\frac{\partial F}{\partial v}\,(u_0,v_0)\,;\;\frac{\partial f}{\partial y}\,(x_0,y_0) = \frac{\partial F}{\partial u}\,(u_0,v_0)-\frac{\partial F}{\partial v}\,(u_0,v_0)$.

3. En déduire les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

On pourra poser : $f(x,y) = F(x+y,x-y)$.

En posant $x = (u+v)/2\,, y = (u-v)/2$, ou de manière équivalente $u = x+y\,, v = x-y$, et en réitérant le calcul précédent dans le cas (iii), on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}) = (\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v})(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}).$$

Donc

$$(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})(x,y) = (\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2})(u,v),$$

et de même

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2})(u,v).$$

En retranchant,

$$(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2})(x,y) = 4\frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial v}(u,v)).$$

Donc, cf TD 1, exercice 9, toutes les solutions de $(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2})(x,y) = 0$ vérifient $4\frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial v}(u,v) = 0$, avec $(u,v) = (x+y, x-y)$, et sont donc de la forme:

$$f(x, y = \Phi(u) + \Psi(v) = \Phi(x+y) + \Psi(x-y),$$

où ces deux fonctions sont arbitraires, de classe C^2.