Université de Nice Sophia-Antipolis 2010 - 2011
L3 Mass. Calcul différentiel

Feuille TD 3 : Corrigé partiel

1. Question de cours.
A. Une fonction f, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, est dite différentiable en un point $M_0 := (x_0, y_0, z_0)$ s'il existe une (unique) application linéaire $l = Df_{M_0}$, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, telle qu'on puisse écrire au voisinage de ce point le développement limité de f à l'ordre 1 suivant :

$$f(x,y,z) := f(M) = f(M_0) + Df_{M_0}\,(M - M_0) + ||M - M_0||\,\theta(M),$$

où $M - M_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ est l'accroissement de (x, y, z) et où $\theta(M) \to 0$ quand $M \to M_0$.

Dans le cas où f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut représenter cette application linéaire $l = Df(M_0)$ par l'application :

$$V := (u, v, w) \to < \nabla f(M_0), V >:= \partial_x f_{M_0}\, u + \partial_y f_{M_0}\, u + \partial_z f_{M_0}\, w\,.$$

On écrit en abrégé: $l = Df_{M_0} = \nabla f(M_0)$: on assimile donc l'application linéaire l et le vecteur $\nabla f(M_0)$. Si on suppose que f admet des dérivées partielles ∂f_x, ∂f_y et ∂f_z au point (x_0, y_0, z_0), on ne peut pas en déduire qu'elle est différentiable en ce point, voir contre-exemple donné dans les Notes de Cours, p6, cf aussi TD2.

B. Le lemme de Schwarz dit qu'une fonction f de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ a ses deux dérivées secondes mixtes égales.

2. Préciser la régularité et donner ensuite, si c'est possible, le gradient, la matrice Hessienne et le développement limité à l'ordre 2 à l'origine des fonctions suivantes

$$f(x,y) = \arctan(x + y^2),\ \ g(x,y) = \ln(1 + xy).$$

a. La fonction f est définie et C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on peut donc calculer ses dérivées partielles premières et secondes

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + (x + y^2)^2},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{1 + (x + y^2)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2 \cdot (x + y^2)}{(1 + (x + y^2)^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2 \cdot (1 + x^2 - 3y^4 - 2xy^2)}{(1 + (x + y^2)^2)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-4y \cdot (x + y^2)}{(1 + (x + y^2)^2)^2}.$$

Le gradient et le DL2 en $(0, 0)$ existent (car $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$). Le gradient et la matrice Hessienne à l'origine sont respectivement donnés par

$$\nabla f(0,0) = (1,0)\ \text{ et } H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

d'où le DL2 de f à l'origine :

$$f(x,y) = x + y^2 + ||(x,y)||^2\,\theta(x,y) \text{ avec } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \theta(x,y) = 0$$

b. La fonction g est définie et C^∞ sur le domaine *ouvert*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, xy > -1\right\}.$$

Pour $(x,y) \in D$, on peut donc calculer ses dérivées partielles premières et secondes :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{y}{1+xy}, \; \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x}{1+xy},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{y^2}{(1+xy)^2}, \; \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(1+xy)^2}, \; \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{1}{(1+xy)^2}.$$

Le gradient et le DL2 en $(0,0)$ existent (car $g \in C^2(D)$) et $(0,0) \in D$ et on a

$$\nabla g(0,0) = \; (0,0 \;\; \text{et } H(f)(0,0) = \; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où le DL2 de g à l'origine :

$$g(x,y) = xy + \|(x,y)\|^2 \theta(x,y) \text{ avec } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \theta(x,y) = 0.$$

Dans tout cet exercice, on a utilisé le théorème de Schwarz car les fonctions sont C^2 sur leur ensemble de définition.

3. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. On suppose que

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

On pose : $F(\rho,\theta) := f(x,y)$, avec $(x,y) := \Phi(\rho,\theta) := (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Donner la matrice jacobienne, i.e. la différentielle, de Φ en un point quelconque (ρ,θ) et en déduire l'expression des dérivées $\partial_\rho F$ et $\partial_\theta F$ en fonction de $\partial_x f$ et $\partial_y f$ et des dérivées de Φ.
Montrer ensuite que si une fonction f vérifie (1), alors elle est radiale, i.e. il existe $G \in C^1(\mathbb{R}_+)$ telle que $f(x,y) = F(\rho,\theta) \equiv G(\sqrt{x^2+y^2})$. En d'autres termes, montrer qu'alors $f(x,y)$ ne dépend que de la distance de (x,y) à $(0,0)$.

3. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. On suppose que

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

On cherche d'abord $f(x,y)$ sous la forme : $f(x,y) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = F(\rho,\theta)$. Exprimer x et y en fonction de ρ et θ. Montrer ensuite que la fonction f est radiale, i.e. qu'il existe $G \in C^2(\mathbb{R}_+)$ telle que $f(x,y) = F(\rho,\theta) \equiv G(\sqrt{x^2+y^2})$. En d'autres termes, montrer que $f(x,y)$ ne depend que de la distance de (x,y) à $(0,0)$.

On pose donc $F(\rho,\theta) = f(x,y) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. D'abord, comme d'habitude, l'application : $\Phi : (\rho,\theta) \mapsto (x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ est de classe C^∞ en tout point (ρ,θ). Rappelons au passage qu'elle est délicate a inverser, surtout a l'origine, car elle n'est n'est bijective que e.g. sur $]0,+\infty[\times[0,+2\pi[$, mais qu'on peut choisir de poser $\rho := \sqrt{x^2+y^2}$. En tout cas, la fonction F est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de fonctions au moins C^1, et f sera radiale ssi f ne dépend que de $\sqrt{x^2+y^2}$, i.e.

ssi F ne dépend que de ρ. Comme F est C^1, calculons sa dérivée par rapport à θ:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,(-\rho\cos\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,(\rho\sin\theta),$$

avec $(x,y) = (\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)$. D'apres l'hypothese, on a donc :

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = 0 \text{ et donc } F(\rho,\theta) \equiv G(\rho),$$

où $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction C^1 arbitraire. Comme $G(\rho) = F(\rho, 0)$, on a : $G \in C^1(\mathbb{R})$. Soient maintenant $x, y \in \mathbb{R}^2$. Soit ρ, θ tels que $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$. Il vient alors

$$f(x,y) = F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = G(\rho) = G(\sqrt{x^2+y^2}),$$

donc f est bien radiale.

4. En échangeant x et y, on se ramène à l'exercice suivant : Etudier la fonction $f(x,y) = x^2 \sin\frac{y}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0,y) = 0$. Est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Est-elle C^2?

Etudions d'abord la régularité de f en dehors de la droite $x = 0$: f est définie, continue, C^1 (elle admet des dérivées partielles et celles-ci sont continues, et même C^∞ en tout point de $\Omega = (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$), comme composée de fonctions définies, continues, C^1, C^∞ sur les ensembles correspondants. Calculons ses dérivées premières en un point (x,y) quelconque. On a pour $x \neq 0$:
$\partial_x f(x,y) = 2x\sin\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x}$ et $\partial_y f(x,y) = x\cos\frac{y}{x}$.
A titre d'illustration (non demandée dans l'exercice) on peut par exemple donner le DL1 de g au point $(1,\pi)$: on a donc $f(1,\pi) = 0$ et $\partial_x f(1,\pi) = -\pi\cos\pi = \pi$ et $\partial_y f(1,\pi) = \cos\pi = -1$. on a donc en ce point le DL à l'ordre 1 suivant :

$$f(x,y) = f(1,\pi) + Df_{(1,\pi)}\,(x-1, y-\pi) + ||(x-1, y-\pi)||\theta(x,y),$$

où $\theta(x,y) \to 0$ quand $(x,y) \to (1,\pi)$,
et où $Df_{(1,\pi)}\,(x-1, y-\pi) = \pi(x-1) - (y-\pi)$.
Ensuite, étudions la régularité de f pour $x = 0$: d'abord pour tout (x,y) on a : $|f(x,y)| \leq x^2 \to f(0,0) = 0$ quand $(x,y) \to (0,0)$, donc f est continue pour $x = 0$.
Par ailleurs, on vérifie directement en revenant à la définition que $\partial_x f(x,y)$ et $\partial_y f(x,y)$ existent et sont nulles pour $x = 0$ et pour tout y. En effet,
$\partial_x f(0,y_0) = \lim_{h\to 0}(h^{-1}(f(h,y_0) - f(0,y_0))$
$= \lim_{h\to 0}(h^{-1}(h^2\sin(\frac{y}{h}) - 0)) = 0,$
et de même
$\partial_y f(0,y_0) = \lim_{h\to 0}(h^{-1}(f(0,y_0+h) - f(0,y_0))$
$= \lim_{h\to 0}(h^{-1}(0-0)) = 0.$
Enfin, de même que pour la fonction f,

$$|\partial_y f(x,y)| = |x\cos\frac{y}{x} \leq |x| \to \partial_y f(0,y_0) = 0$$

quand $(x,y) \to (0,y_0)$, donc $\partial_y f(x,y)$ est continue au point $(0,y)$, pour tout y.
Etudions de même la continuité de $\partial_x f$ pour $x=0$. On a :
$\partial_x f(x,y) = 2x \sin\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x}$.
Le premier morceau tend vers 0 quand $(x,y) \to (0,y_0)$, car $|\sin\frac{y}{x}| \leq 1$. Par contre, si $y_0 \neq 0$, le deuxième morceau n'a pas de limite, car $\sin\frac{y}{x}$ n'a pas de limite quand$(x,y) \to (0,y_0)$. Par contre, si $y_0 = 0$, alors $\partial_x f(x,y) \to \partial_y f(0,0) = 0$ quand $(x,y) \to (0,0)$.
Donc f est C^1 à l'origine, donc différentiable en ce point, avec une différentielle nulle, mais elle n'est pas C^1 pour $x=0$ et $y \neq 0$. On peut donc en déduire (non demandé dans l'exercice) qu'elle admet donc à l'origine le DL à l'ordre 1 suivant :

$$f(x,y) = f(0,0) + ||(x,y)||\theta(x,y),$$

où $\theta(x,y) \to 0$ quand $(x,y) \to (0,0)$.

5. voir corrigé oral.