Université de Nice Sophia-Antipolis 2009 - 2010
L3 Mass. Calcul différentiel

Contrôle du 08/12/2009

Durée : 2H. Documents autorisés : aucun pour la question 1, ensuite une page recto-verso, calculettes interdites

1. Question de cours

A. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$, et $a \in \Omega$.
(i) Si f est seulement différentiable au point a, est-ce qu'elle admet un DL1 au point a? Si cest le cas, écrire ce DL1, puis donner une condition nécessaire d'ordre 1 pour que a soit un point de minimum local de f sur Ω.

(ii) On suppose maintenant f de classe C^2 au point a. Ecrire le développement limité de f à l'ordre 2, au voisinage de ce point, puis donner une condition suffisante pour que a soit un point de minimum local de f sur Ω.

B. Enoncer le théorème des extrema liés.

C. Soit $f(x_1, x_2) := x_1 + x_2 - 1$, $a = (1, 1)$ et $C_i, i = 1, 2, 3$ la courbe d'équation :
(i) $g_1(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2 + 1 = 0$,
(i) $g_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2 = 0$,
(i) $g_3(x_1, x_2) = 2\,(x_1)^2 + (x_2)^2 - 3 = 0$.
Dire dans chacun des cas si a peut être un point d'extremum local de f sur C_i.

2. Chercher les extrema globaux de la fonction : $f(x, y) = \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4}$ sur la courbe

$$C = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\},$$

en appliquant le Théorème des extrema liés.

3. On considère la fonction $f(x, y) = (x - 1)^2 + 2(y - 1)^2$. Chercher son minimum sur $\mathbb{R}^2$, puis ses maxima sur le domaine :

$$D = \{(x, y);\ 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 3\}.$$

4. On considère l'équation :

$$f(x, y) = y - \sin x,\ \ (x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Quels sont les points (x_0, y_0) solutions de cette équation, pour les quels le Théorème des fonctions implicites permet d'exprimer localement $x := \varphi(y)$ en fonction de y?

En calculant la dérivée de la fonction composée : $\psi : y \mapsto \frac{d}{dy} f(\varphi(y), y)$, retrouver l'expression habituelle de la dérivée de la fonction Arc sinus pour $0 < y < \pi$. Détaillez le calcul de la dérivée de ψ. Qu'arrive-t-il pour $y = 0$ ou π?