

Université de Nice Sophia-Antipolis 2007 - 2008

L3 Mass. Calcul différentiel

Examen du 12/12/2007

Durée : 2Heures. Documents autorisés : aucun pour la question 1, ensuite une page recto-verso, calculettes interdites

1. Question de cours

A. Énoncer le Théorème des fonctions implicites pour une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$. Exemple : on suppose que $f(x, y) = x - y^2$ et que $f(x_0, y_0) = 0$. Quels sont les points au voisinage desquels on peut exprimer y en fonction de x : $y = \varphi(x)$, et quelle est la fonction φ associée?

B. Énoncer le Théorème des extrema liés, en précisant les hypothèses.

2. Étudier la fonction

$f : (x, y) \rightarrow f(x, y) := y^2 \sin \frac{x}{y} + x - \pi y$ si $y \neq 0$; $f(x, 0) = x$.

Donner si c'est possible son développement limité à l'ordre 2 au point $(\pi, 1)$. Est-ce que ce point $(\pi, 1)$ correspond pour f à un col ou à un extremum local? Préciser les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice Hessienne de f en ce point.

3. Soit $a > b > 0$. Chercher les extrema de $f(x, y) := x^2 + y^2$ sur $D := \{(x, y) ; g(x, y) := \frac{x^p}{a^p} + \frac{y^p}{b^p} = 1\}$, en supposant d'abord $p = 2$, puis $p = 4$.

Dans chaque cas, préciser les points de minimum ou de maximum global sur D pour la fonction f .

Dans les deux cas $p = 2$ ou $p = 4$, est-ce que la valeur du maximum ou du minimum de f changerait si on remplaçait la contrainte $(x, y) \in D$ par une contrainte de type inégalité : $(x, y) \in D'$, où $D' := \{(x, y) ; g(x, y) := \frac{x^p}{a^p} + \frac{y^p}{b^p} \leq 1\}$?

4. Soit $F(x, y) := x + y$. Chercher le(s) point(s) de maximum (global) de F sur $D := \{(x, y) ; x \geq 0, y \geq 0, g_3(x, y) := \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1\}$. Pour ce(s) point(s) de maximum de f , tracer les vecteurs gradients ∇f et $\nabla g_i, i = 1, 2, 3$ "actifs" en ce(s) point(s), i.e. tels que $g_i(x, y) = 0$.

Quel est le lien avec l'un des cas de l'exercice précédent? Précisez.

5. On considère la fonction $\Phi : (x, y) \rightarrow (u := y^2, v := x^3)$. À quelle condition cette fonction est-elle (localement) inversible, et d'inverse C^1 ? Soit (x, y) un point ne vérifiant pas cette condition. Est-ce que Φ est surjective au voisinage de (x, y) ?