Université de Nice Sophia-Antipolis 2008 - 2009
L3 Mass. Calcul différentiel

Examen du 25/11/2008

Durée : 2Heures. Documents autorisés : aucun pour la question 1, ensuite une page recto-verso, calculettes interdites

1. Question de cours

A. Soit f une fonction de classse C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire son DL à l'ordre 2 en un point a quelconque. Donner une condition nécessaire pour qu'un point $a \in \mathbb{R}^n$ soit un point de minimum local de f sur $\mathbb{R}^n$. Donner une condition suffisante pour le même résultat.

B. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On note $C = \{(x, y) \; ; x + y - 1 = 0 \; , y \geq 0\}$. Soit a un point de C. On suppose connaître $(u, v) := \nabla f(a)$ en un point a donné. Dans chacun des trois cas suivants

$a = (1/2, 1/2), (u, v) = (1, 1)$,
$a = (1/2, 1/2), (u, v) = (1, 0)$,
$a = (1, 0), (u, v) = (1, 0)$,

que pouvez-vous affirmer (une seule réponse):

(1) a est peut-être un point de minimum local de f sur C ?
(2) a est un point de minimum local de f sur C ?
(3) a n' est pas un point de minimum local de f sur C?

2. Soit f une fonction C^1 de deux variables. On suppose que

$$x\partial_x f + y\partial_y f \equiv 0.$$

En passant en coordonnées polaires, en posant donc

$$F(\rho, \theta) := f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta),$$

montrer qu'il existe deux fonctions φ et ψ de classe C^1 telles que

$$f(x, y) \equiv \varphi(\theta) \equiv \psi(y/x).$$

3. On considère la fonction f:
$f(x, y) := x^2 - 2xy + 3y^2 - 6x + 2y + 3$.

a) Peut-on affirmer a priori l'existence de point(s) de maximum ou de minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$?

b) Chercher ses points critiques et dire s'il s'agit de col(s) ou de point(s) de minimum ou de maximum local sur $\mathbb{R}^2$. Ecrire le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage d'un point critique.

c) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice Hessienne de f.

d) Que pouvez-vous dire du reste dans ce développement? Qu'en déduisez-vous sur l'existence de point(s) de maximum ou de minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$?

4. Chercher les extrema globaux, s'il y en a, de la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ sur le domaine

$$C = \{(x,y)\,;xy = a\},\ a \in \mathbb{R}$$

en appliquant le Théorème des extrema liés s'il s'applique. On pourra discuter séparément le cas $a = 0$.

5. On considère la fonction $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$. Chercher ses extrema globaux sur le domaine

$$D = \{(x,y)\,;x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq c\},$$

avec $c = 0$ ou 3.