L3 Mass - Calcul Différentiel
Université de Nice Sophia-Antipolis
2006/2007

Devoir de mathématiques 1

à rendre à votre chargé de TD avant le 22 octobre

1. Dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 et régularité des fonctions suivantes (ne pas oublier ensemble de définition, etc). Donner le gradient en l'origine et un développement limité à l'ordre 2 en l'origine.

$$f_1(x,y) = \arctan(x+y^2),\ f_2(x,y,z) = \frac{x-y+\ln(1+\sin(z))}{e^x+e^z},$$

$$f_3(x,y) = \ln(1+xy).$$

2. Différentiabilité de

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

3. Montrer que la fonction $f(x,y) = y^2 \sin \frac{x}{y}$ si $y \neq 0$ et $f(x,0) = 0$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Est-elle C^2?

4. Déterminer toutes les fonctions $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$ telles que $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 2x+7$.

5. Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On pose $F(x,y,z) = f(u(x,y,z), v(x,y,z))$ pour tous $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ et $\frac{\partial F}{\partial z}$ dans chacun des cas suivants:

$$a) \begin{cases} u(x,y,z) = x+yz \\ v(x,y,z) = 2x+y \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} u(x,y,z) = \cos(xy)+z^4 \\ v(x,y,z) = ze^{x+y} \end{cases} ;$$

$$c) \begin{cases} u(x,y,z) = x\cos(y-z^2) \\ v(x,y,z) = \sin(x)\sin(y)\sin(z) \end{cases} ;$$

6. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. On suppose que

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

En utilisant la fonction annexe $F(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, montrer que la fonction f est radiale, cad il existe $\varphi \in C^2(\mathbb{R}_+)$ telle que $f(x,y) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2})$. En d'autres termes, $f(x,y)$ ne depend que de la distance de (x,y) à $(0,0)$.