Université de Nice Sophia-Antipolis 2007 - 2008
L3 Mass. Calcul différentiel

TD 1

1.Echauffement : Tracer les graphes des fonctions suivantes

$$\ln x,\ \exp x,\ \exp(-x),\ \sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \text{sh } x,\ \text{ch } x,\ \text{th } x,$$

et des fonctions réciproques en indiquant sans justification les domaines de définition de ces fonctions.
Ensemble de définition, continuité et dérivation et éventuellement dérivée de chacune des fonctions suivantes:

$$f_1(x) = x^x,\ f_2(x) = (\ln x)^{e^x},\ f_3(x) = \ln(2x + e^{\sqrt{x}}),$$

$$f_4(y) = (1 + e^{\cos y})^{1,23},\ f_5(x) = \frac{\sin(x^2 - (\ln x)^2)}{1 + e^{x+\frac{1}{x}}}.$$

2. Dérivées partielles et différentiabilité des fonctions suivantes (avec ensemble de définition...). Calculez la dérivée directionnelle éventuelle au point P dans la direction $\vec{v}$. Calculez ensuites les dérivées partielles.

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x,y) = e^{-x^2-y^2}, \\ P = (2,2), \\ \vec{v} = (2,4) \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{l} f_2(x,y) = x^y, \\ P = (1,1), \\ \vec{v} = (1,-1) \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{l} f_3(x,y,z) = x^2 z \arctan\left(\frac{y}{z}\right), \\ P = (0,0,1), \\ \vec{v} = (0,1,2) \end{array}\right.$$

3. Pour chacune des fonctions suivantes, calculez les dérivées partielles, donnez la différentielle éventuelle et un développement limité à l'ordre 1 au point P.

$$f(x,y) = (2x^2 + 3, 5xy - 7), \quad P = (0,0)$$

$$f(x,y,z) = \left(\frac{x^3}{1+\ln x} + y - z, z^2 + \frac{e^y}{x}, xyz\right), \quad P = (1,0,2)$$

4. Trouvez toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que les dérivées partielles existent et que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + y + 1$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

5. Soit $f \in C^0([0,1])$. Soit la fonction $\varphi(x,y) = \int_0^y (x-t)\cdot f(t)\,dt$ pour $(x,y) \in D =]0,1[^2$.
a. Calculez les différentielles partielles de φ sur D (si elles existent).
b. La fonction φ est-elle différentiable sur D?

6. Montrez que la fonction définie par

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(x,y) = \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 & \end{array} \right.$$

est C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Calculez son gradient en tout point.

7. Différentiabilité de

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 & \end{array} \right. .$$

8. Déterminez les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

Même question si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$.

9. Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On pose $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Calculez $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ dans chacun des cas suivants:

$$a) \left\{ \begin{array}{l} u(x,y) = x+y \\ v(x,y) = 2x+y \end{array} \right. ; \quad b) \left\{ \begin{array}{l} u(x,y) = x^2-y^2 \\ v(x,y) = 2xy \end{array} \right. ;$$

$$c) \left\{ \begin{array}{l} u(x,y) = x\cos(y) \\ v(x,y) = x\sin(y) \end{array} \right. ;$$

10. Déterminez les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

On pourra introduire la fonction annexe $g(u,v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$ et exprimer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles de g.

11. Trouvez le plus grand domaine de $\mathbb{R}^2$ sur lequel $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ est différentiable et donnez sa différentielle. Même question sur $\mathbb{R}^n$ avec $f(x) = \sqrt{(x_1)^2 + ... + (x_n)^2}$.

12. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}_+^\star)$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on définit $\varphi(x) = f(\sqrt{(x_1)^2 + ... + (x_n)^2})$. Montrez que $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n - \{0\})$. Trouvez toutes les fonctions f telles que

$$\Delta\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 0.$$

13. Soit la fonction f définie par $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Calculez $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ (si elles existent). La fonction f est-elle C^2?