

Université de Nice Sophia-Antipolis 2008 - 2009
L3 Mass. Calcul différentiel

TD 1

1. Echauffement : Tracer les graphes des fonctions suivantes

$$\ln x, \exp x, \exp(-x), \sin x, \cos x, \tan x,$$

et des fonctions réciproques en indiquant sans justification les domaines de définition de ces fonctions.

Etude, tableau de variations et graphe de $f(x) = x + (\ln x)/x$. Préciser notamment les asymptotes, ainsi que les valeurs de f et f' pour $x = e$. Etudier l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité et éventuellement donner la dérivée de chacune des fonctions suivantes:

$$f_1(x) = x^x, f_2(x) = (\ln x)^{e^x}, f_3(x) = \ln(2x + e^{\sqrt{x}}),$$

$$f_4(x) = (1 + e^{\cos x})^{1,23}, f_5(x) = \frac{\sin(x^2 - (\ln x)^2)}{1 + e^{x + \frac{1}{x}}}.$$

2. Dérivées partielles et différentiabilité des fonctions suivantes (avec ensemble de définition...). Calculez la dérivée directionnelle éventuelle au point P dans la direction \vec{v} . Calculez ensuite les dérivées partielles.

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x, y) = e^{-x^2 - y^2}, \\ P = (2, 2), \\ \vec{v} = (2, 4) \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} f_2(x, y) = x^y, \\ P = (1, 1), \\ \vec{v} = (1, -1) \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} f_3(x, y, z) = x^2 z \arctan\left(\frac{y}{z}\right), \\ P = (0, 0, 1), \\ \vec{v} = (0, 1, 2) \end{array} \right.,$$

3. Pour chacune des fonctions suivantes, calculez les dérivées partielles, donnez la différentielle éventuelle et un développement limité à l'ordre 1 au point P .

$$f(x, y) = (2x^2 + 3, 5xy - 7), \quad P = (0, 0)$$

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x^3}{1 + \ln x} + y - z, z^2 + \frac{e^y}{x}, xyz \right), \quad P = (1, 0, 2)$$

4. Trouvez toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telles que ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et vérifient

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + y + 1$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

5. Soit $f \in C^0([0, 1])$. Soit la fonction $\varphi(x, y) = \int_0^y (x-t) \cdot f(t) dt$ pour $(x, y) \in D =]0, 1]^2$.

- Calculez les dérivées partielles de φ sur D (si elles existent).
- La fonction φ est-elle différentiable sur D ?

6. Montrez que la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

est C^1 sur \mathbb{R}^2 . Calculez son gradient en tout point.

7. Différentiabilité de

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases} .$$

8. Trouvez le plus grand domaine de \mathbb{R}^2 sur lequel $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ est différentiable et donnez sa différentielle. Même question sur \mathbb{R}^n avec $f(x) = \sqrt{(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2}$.

9. Déterminez les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

Sujet de réflexion. Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 3/2 \end{pmatrix} .$$

On demande donc de trouver ses valeurs propres λ_i , ses vecteurs propres $\mathbf{W}_i, i = 1, 2$, de vérifier qu'on peut choisir ces vecteurs pour former une base ortho-normale (car A est symétrique réelle), de donner la matrice de passage P et son inverse $P^{-1} = {}^t P$ (P est orthogonale), puis de vérifier que $P^{-1}AP = D := \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.