Université de Nice Sophia-Antipolis 2010 - 2011
L3 Mass. Calcul différentiel

TD 1

1. Echauffement :Tracer les graphes des fonctions suivantes

$$\ln x,\ \exp x,\ \exp(-x),\ \sin x,\ \cos x,\ \text{tg x}, \text{sh}x, \text{ch } x,\ \text{th } x,$$

et des fonctions réciproques, en indiquant sans justification les domaines de définition de ces fonctions.
Etude, tableau de variations et graphe de $f(x) = x \ln x$ et de $g(x) = x + (\ln x)/x$. Préciser notamment les asymptotes, ainsi que les valeurs de f et f' pour $x = e^{-1}$ et 1, et de g et g' pour $x = e$.
Etudier l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité et éventuellement donner la dérivée de chacune des fonctions suivantes:

$$f_1(x) = x^x,\ f_2(x) = (\ln x)^{e^x},\ f_3(x) = \ln(2x + e^{\sqrt{x}}),$$

$$f_4(x) = (1 + e^{\cos x})^{1,23},\ f_5(x) = \frac{\sin(x^2 - (\ln x)^2)}{1 + e^{x+\frac{1}{x}}}.$$

2. Donner les dérivées partielles et tudier la différentiabilité des fonctions suivantes (avec ensemble de définition...). Calculez la dérivée directionnelle éventuelle au point P dans la direction $\vec{v}$. Calculez ensuite les dérivées partielles.

$$\begin{cases} f_1(x,y) = e^{-x^2-y^2}, \\ P = (2,2), \\ \vec{v} = (2,4) \end{cases} ; \quad \begin{cases} f_2(x,y) = x^y, \\ P = (1,1), \\ \vec{v} = (1,-1) \end{cases} ; \quad \begin{cases} f_3(x,y,z) = x^2 z \arctan\left(\frac{y}{z}\right), \\ P = (0,0,1), \\ \vec{v} = (0,1,2) \end{cases}$$

3. Pour chacune des fonctions suivantes, calculez les dérivées partielles, donnez la différentielle éventuelle et, s'il en existe, un développement limité à l'ordre 1 au point P.

$$f(x,y) = (2x^2 + 3,5xy - 7), \quad P = (0,0)$$

$$f(x,y,z) = \left(\frac{x^3}{1+\ln x} + y - z, z^2 + \frac{e^y}{x}, xyz\right), \quad P = (1,0,2)$$

4. Trouvez toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et vérifient

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + y + 1$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

5. Soit $f \in C^0([0,1])$. Soit la fonction $\varphi(x,y) = \int_0^y (x-t)\cdot f(t)\,dt$ pour $(x,y) \in D =]0,1[^2$.
a. Calculez les dérivées partielles de φ sur D (si elles existent).
b. La fonction φ est-elle différentiable sur D?

6. Montrez que la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

est C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Calculez son gradient en tout point.

7. Différentiabilité de

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}.$$

8. Trouvez le plus grand domaine de $\mathbb{R}^2$ sur lequel $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ est différentiable et donnez sa différentielle. Même question sur $\mathbb{R}^n$ avec $f(x) = \sqrt{(x_1)^2 + ... + (x_n)^2}$.

9. Déterminez les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

.

Sujet de réflexion 1. Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & -2 \end{pmatrix}.$$

On demande donc de trouver ses valeurs propres λ_i, ses vecteurs propres $\mathbf{W_i}, \mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}$, de vérifier qu'on peut choisir ces vecteurs pour former une base ortho-normale (car A est symétrique réelle), de donner la matrice de passage P et son inverse $P^{-1} = {}^tP$ (P est orthogonale), puis de vérifier que $P^{-1}AP = D :=$diag(λ_1, λ_2).

Sujet de réflexion 2. On rappelle sans démonstration le Théorème de Rolle : si f est une fonction de classe C^1 sur un intervalle I contenant deux points a et b et si $f(a) = f(b)$ alors il existe au moins un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
On considère un pointx_0 et un point $x = x_0 + h$ fixés. Retrouver la formule de Taylor-Mac Laurin en appliquant successivement le Théorème de Rolle à la fonction g et à sa dérivée g', où :

$$g : y \mapsto g(y) := f(y) - [f(x_0 + (y-x_0)f'(x_0) + (\beta/2)(y-x_0)^2],$$

et où la constante β a été choisie pour que g s'annule pour $y = x$.