L3 Mass-Mathématiques
Université de Nice Sophia-Antipolis
2006/2007

Feuille d'exercices 2

1. Donner un développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$ de la fonction suivante définie sur $(\mathbb{R}_+^\star)^3$:

$$f(x,y,z) = \left(\frac{\ln(1+xy)}{z^3+3}, z\sin(e^x) - \arctan(\cos xy) \right).$$

2. Les fonctions suivantes sont-elles C^2 sur leur domaine de définition (que l'on précisera)? Donner dans ce cas un développement limité à l'ordre 2 en $(0,0)$.

$$f_1(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 6x + 2y + 3, \quad f_2(x,y) = a^x(\ln(1+y))^3,$$
$$f_3(x,y) = \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{xy}, \quad f_4(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$
$$f_5(x,y) = \frac{1+x+y}{x^2-y^2+1}$$

3. Les fonction suivante sont-elles C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Même question avec C^2.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4. Soit la fonction

$$f(x,y) := \arctan(2x^2 + 3xy - 4y^2).$$

Donner un developpement limité à l'ordre 2 au point $P = (1,1)$. Donner alors une valeur approchée de $f(1.02, 0.97)$, et comparer avec la valeur exacte.

5. Calculer les extrema de la fonction

$$f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 - 2xy - 8x - 2y + 3$$

sur le domaine

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 3\right\}.$$