Université de Nice Sophia-Antipolis 2008 - 2009
L3 Mass. Calcul différentiel

TD 2

1 : devoir à rédiger.
On considère la fonction :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que cette fonction admet une dérivée directionnelle $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$ à l'origine dans toute direction $\mathbf{v}$ et donner sa valeur. Montrer qu'en particulier les deux dérivées partielles $\partial_x f(0,0)$ et $\partial_y f(0,0)$ sont nulles.

En supposant provisoirement que f est différentiable, donner son développement limité à l'ordre 1 à l'origine.
En considérant le cas particulier où $x = y^3$, montrer que la fonction

$$\theta(x,y) := \frac{1}{||(x,y)||}.(f(x,y) - f(0,0) - Df_{(0,0)}.(x,y))$$

ne tend pas vers 0 quand $(x,y) \to (0,0)$.

En considérant le même cas particulier, montrer que pour toute constante λ la courbe d'équation $x = \lambda y^3$ est une courbe de niveau de f. pensez-vous que f est continue à l'origine? Conclusions : répondez aux questions suivantes :

a) est-ce que f est continue à l'origine?
b) est-ce que f admet un développement limité d'ordre 1 à l'origine?
c) est-ce que f est différentiable à l'origine?
d) est-ce que $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont continues à l'origine?

2. Donner un développement limité à l'ordre 1 en $(0,0,0)$ de la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}^3_+$:

$$f(x,y,z) = \left(\frac{\ln(1+xy)}{z^3+3}, z\sin(e^x) - \arctan(\cos xy) \right).$$

On rappelle que la dérivée de $g(x) = \arctan x$ est $g'(x) = 1/(1+x^2)$.

3. Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On pose $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Calculez $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ dans chacun des cas suivants:

$$a) \begin{cases} u(x,y) = x+y \\ v(x,y) = 2x+y \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} u(x,y) = x^2-y^2 \\ v(x,y) = 2xy \end{cases} ;$$

$$c)\ \begin{cases} u(x,y) = x\cos(y) \\ v(x,y) = x\sin(y) \end{cases} ;$$

4. Déterminez les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

On pourra introduire la fonction annexe $g(u,v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$ et exprimer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles de g.