

Université de Nice Sophia-Antipolis 2010 - 2011
L3 Mass. Calcul différentiel

TD 2

1 : devoir à rédiger.

On considère la fonction :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Montrer que cette fonction admet une dérivée directionnelle $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$ à l'origine dans toute direction \mathbf{v} et donner sa valeur. Montrer qu'en particulier les deux dérivées partielles $\partial_x f(0, 0)$ et $\partial_y f(0, 0)$ sont nulles.

En supposant provisoirement que f est différentiable, donner son développement limité à l'ordre 1 à l'origine.

En considérant le cas particulier où $x = y^3$, montrer que la fonction

$$\theta(x, y) := \frac{1}{\|(x, y)\|} \cdot (f(x, y) - f(0, 0) - Df_{(0,0)} \cdot (x, y))$$

ne tend pas vers 0 quand $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

En considérant le même cas particulier, montrer que pour toute constante λ la courbe d'équation $x = \lambda y^3$ est une courbe de niveau de f . pensez-vous que f est continue à l'origine? Conclusions : répondez aux questions suivantes :

- a) est-ce que f est continue à l'origine?
- b) est-ce que f admet un développement limité d'ordre 1 à l'origine?
- c) est-ce que f est différentiable à l'origine?
- d) est-ce que $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont continues à l'origine?

2. Soit F de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et $\Phi(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ de classe C^1 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 . On pose $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y)) = (F \circ \Phi)(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculez $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ dans chacun des cas suivants:

$$(i) \begin{cases} u(x, y) = x + y \\ v(x, y) = 2x + y \end{cases} ; \quad (ii) \begin{cases} u(x, y) = x^2 - y^2 \\ v(x, y) = 2xy \end{cases} ; \quad (iii) \begin{cases} u(x, y) = x + y \\ v(x, y) = x - y \end{cases}$$

3. En déduire les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

On pourra poser : $f(x, y) = F(x + y, x - y)$.

2

4. La fonction suivante est-elle C^1 sur \mathbb{R}^2 ? Même question avec C^2 .

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$