Université de Nice Sophia-Antipolis 2010 - 2011
L3 Mass. Calcul différentiel

TD 4

Exercice 1. Donner les dérivées d'ordre 2 de la fonction suivante :

$$a)\ f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3.$$

Trouver ses points critiques, et déterminer dans chaque cas s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum, local ou global, ou bien d'un point selle.

Exercice 2. Chercher d'abord les minima de la fonction

$$f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 - 2xy - 8x - 2y + 3$$

sur $\mathbb{R}^2$, puis chercher les extrema de f sur le domaine

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 3\right\}.$$

3. Etudier le minimum et le maximum de $f(x,y) = x - y + 2xy + y^2/2$ sur $[-1,1] \times [-1,1]$.

4. On considère la fonction

$$f(x,y) = \frac{3}{2}xy + 2y^2.$$

On note m (resp. M) la borne inférieure (resp. supérieure) de f sur $\mathbb{R}^2$.
a) Peut-on affirmer a priori que ces bornes m et M sont finies ?
b) Peut-on affirmer a priori que ces bornes sont atteintes, et donc sont respectivement un minimum et un maximum ?
c) Diagonaliser la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 \\ 3/2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Expliciter les valeurs et les vecteurs propres de A et la matrice orthogonale P de changement de base. Décomposer la forme quadratique $Q(X) := Q(x,y)$ associée à A en somme de carrés et vérifier par le calcul qu'on a bien :

$$f(x,y) = 1/2\, Q(x,y) = 1/2(\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2),$$

où x' et y' sont les composantes dans la base de vecteurs propres. Qu'en déduisez-vous sur la nature des points critiques éventuels de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$?
d) Est-ce que f admet des extrema locaux ou globaux sur $\mathbb{R}^2$?
e) Répondez maintenant **précisément** aux questions a) et b)