L3 Mass
Calcul différentiel
2010/2011

TD 5

1. Pour $i = 1, 2$, minimiser la fonction f_i sur le domaine D_i, avec :
$f_1(x, y, z) = x^2 + y^2$; $f_2(x, y) = xy$, et

$$D_1 = \left\{ (x, y)\,;\ \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = 1 \right\},\ D_2 = \left\{ (x, y)\,;\ x^2 + y^2 = 1 \right\}.$$

2. Chercher les extrema globaux de la fonction : $f(x, y) = \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4}$ sur la courbe

$$C = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\},$$

en appliquant le Théorème des extrema liés.

3. Refaire l'exercice 2 de la feuille 4 à l'aide des multiplicateurs de Lagrange.

4. Soit $f(x_1, x_2) := x_1 + x_2 - 1$, $a = (1, 1)$ et $C_i, i = 1, 2, 3$ la courbe d'équation :
(i) $g_1(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2 + 1 = 0$,
(i) $g_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2 = 0$,
(i) $g_3(x_1, x_2) = 2\,(x_1)^2 + (x_2)^2 - 3 = 0$.
Dire dans chacun des cas si a peut être un point d'extremum local de f sur C_i.

5. On considère la fonction $f(x, y) = (x - 1)^2 + 2(y - 1)^2$. Chercher son minimum sur $\mathbb{R}^2$, puis ses maxima sur le domaine :

$$D = \{(x, y);\ 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3\}.$$

6. Soit l'équation

$$2y^3x^2 - 2xy^2 - xy - y^2 = 1.$$

a) Montrer que cette équation définit de façon implicite x en fonction de y : $x = \phi(y)$ avec ϕ de classe C^1 au voisinage de $y_0 = 1$ et $x_0 = 2$.
b) Calculer $\phi'(1)$ et $\phi''(1)$.

7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(u, v) = (u^2 + 2v, 2v^2 - u)$. Quel est l'ensemble des points où cette fonction est localement inversible, d'inverse C^1?