Ch 1. Fonctions différentiables

§1 - Rappels. Notions de topologie : $n=1$, $n>1$.

. Cas $n=1$. Soit $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ et $x_0 \in A$

Déf . on dit que <u>f a une limite l quand $x \to x_0, x \in A$</u>

si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$ tq $\forall x \in A, \{ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \}$

. extensions: $\underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}}{f(x) \to \underset{(-)}{+} \infty}$; $\underset{\substack{x \to \pm\infty \\ x \in A}}{f(x) \to l}$; $f(x) \to \pm\infty$ $\left(\substack{x \to \underset{(+)}{-} \infty \\ x \in A}\right)$

. on dit que <u>f est continue en $x_0 \in$ intérieur de A : $\mathring{A}$</u>

si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$ tq $\forall x \in A, \{ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \}$,

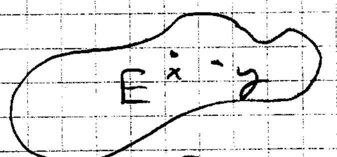
<u>($\mathring{A}$ est défini plus loin pour $n \geq 1$) : $l = f(x_0)$.</u>

. on dit que <u>f est dérivable en $x_0 \in \mathring{A}$, de dérivée $f'(x_0)$</u>

si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$ tq $\forall x \in A, \left\{ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon \right.$

- Pour généraliser, on remplace la <u>distance</u>

$d(x,y) := |x - y|$



<u>Déf</u> : Soit E un <u>ensemble</u> qlcq

on dit que d est une <u>distance</u> sur E si

. $\forall x, y,\ d(x,y) \geq 0$

. $d(x,y) = 0$ <u>ssi</u> $x = y$

. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ <u>inégalité du triangle</u>

<u>Exo</u>: mq $\forall x, y, z)$, $|d(x,z) - d(x,y)| \leq d(y,z)$. □

<u>(2ème inégalité du triangle)</u>

En particulier, si E est un <u>espace vectoriel</u>, ex

$E = \mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n \ldots$

Déf On dit que $\{x \in E \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}\}$ est une norme, notée ($\|\cdot\|$ ou $N(\cdot)$) sur (l'e.v.) E, si E est un espace vectoriel et si
- $\forall x$, $\|x\| \geq 0$, et $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$
- $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ inégalité du triangle

Exo mq $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$ (2ème inégalité du ") □

Exemples :

1) $E = \mathbb{R}$, $\|x\| := |x|$ = valeur absolue, $d(x,y) = |x-y|$
2) $E = \mathbb{R}^2$, $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$; $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$ sont des normes, et $d(x,y) := \|x-y\|_{1 \text{ ou } 2 \text{ ou } \infty}$:= distance.

Exo : . dessiner la boule - unité de $\mathbb{R}^2$ pour $\|\cdot\|_{1,2,\text{ou } \infty}$.
. mq ces normes sont deux à deux équivalentes
ex. $\exists \alpha, \beta > 0$ tq $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$.

Dans toute la suite, E est un e.v.n. (espace vectoriel normé), muni d'une norme $\|\cdot\|$ ou $N(\cdot)$

Déf On appelle boule $\left\{\begin{matrix}\text{ouverte} \\ \text{fermée}\end{matrix}\right\}$ de centre x_0, de rayon r

$B_{\|\cdot\|}(x_0, r) := \{x \in E$; (tq) $N(x - x_0) := \|x - x_0\| < r\}$ (ouverte)

$\overline{B_{\|\cdot\|}(x_0, r)} := \{$ " ; $N(x - x_0) := \|x - x_0\| \leq r\}$ fermée

Exo : dans $\mathbb{R}^2$, dessiner la boule - unité pour $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$.

Déf Soit (E, N) un e.v.n. et $A \subset E$. On dit que

(i) A est ouvert si $\forall x \in A$, $\exists r(x) > 0$ tq $B(x, r(x)) \subset A$,

(ii) A est fermé si $E \setminus A$ (son complémentaire) est ouvert.

(iii) On note Int(A) ou $\mathring{A}$ l'intérieur de A, i.e. le plus grand ouvert de E contenu dans A, et on note $\overline{A}$ l'adhérence de A, i.e. le + petit fermé de E contenant A

Illustration :

- si $A = [a,b[\subset \overset{E}{\underset{\|}{}}\mathbb{R}$, $\mathring{A} =]a,b[\subset A = [a,b[\subset \bar{A} = [a,b]$
- si $A = B(x_0, r) \subset E = \mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_{1,2 \text{ ou } \infty}$, alors
  $\mathring{A} = A$, $\bar{A} = \overline{B(x_0,r)}$, $\mathring{(\bar{A})} = \mathring{A} = A$, et $\bar{\mathring{A}} = \bar{A} = \bar{B}(x_0, r)$

Rem. On a toujours $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$. On note
$Fr(A)$ la frontière de $A := \bar{A} \setminus \mathring{A}$.

Déf. Soit $f : \Omega \subset E \to F$, Ω ouvert $\subset E$, (E, N_E) et (F, N_F) : e.v.n.

(i) $\underset{(x \to a, x \in \Omega)}{f(x) \to l}$: $f(x)$ a une limite l quand $x \to a, x \in \Omega$
si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha(\varepsilon, a)$ tq $\forall x \in \Omega, \{N_E(x-a) < \alpha \Rightarrow N_F(f(x) - l) < \varepsilon\}$
$\Leftrightarrow \{\|x - a\|_E < \alpha \Rightarrow \|f(x) - l\|_F < \varepsilon\}$

(ii) f est continue en $x = a$ si
$\underset{\substack{x \to a \\ (x \in \Omega)}}{f(x) \to} l := f(a)$.

Rem. Pour Ω ouvert, $\forall a \in \Omega$, $x \in \Omega$ que $\|x - a\|_E < \alpha_a$, qui dépend de a.

§2. Dérivées partielles - Différentiabilité :

Déf. Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$ munis de $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}, \|\cdot\|_{\mathbb{R}^p}$

Soit $a \in \Omega$ et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. On dit que f admet une dérivée directionnelle en $x = a$, dans la direction $\vec{v}$, si

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\vec{v}) - f(a)}{t}$$ existe. On la note alors $f'(a, \vec{v})$

ou $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a)$. C'est la dérivée de la fonction d'une variable (réelle) : $\{t \mapsto f(a + t\vec{v})\}$, calculée en $t_0 = 0$.

Rem. ⚠ $f := (f_1, f_2, \dots, f_p)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.
Chaque $f_p : \Omega \to \mathbb{R}$

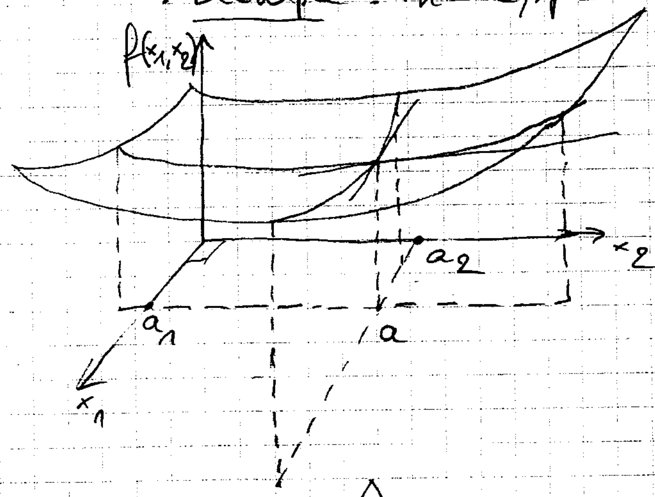
Exemple : $f(x) := f(x,y) := (\cos(x+y), x + 2y, -xy^2) : \Omega = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
calculer $f'(a, \vec{v})$ pour $a = (1,2)$ et $\vec{v} = (2,1)$

Déf. Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. On note $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \partial_i f(a) := \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(a) := f'(a, \vec{e}_i)$, si cette dérivée directionnelle existe, et on l'appelle la <u>dérivée partielle de f au point a, / à x_i</u>
(/ à := par rapport à)

<u>Rem.</u> . ex. si $p = 2$, $\partial_i f(a) := (\partial_i f_1(a), \partial_i f_2(a)) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^p$.

. $\partial_i f(a)$ est la dérivée au point $x_i := a_i$ de la fonction d'une variable réelle (à valeurs ds $\mathbb{R}^p$).
$f_{a,i} := \{x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)\}$ pour $x_i = a_i$

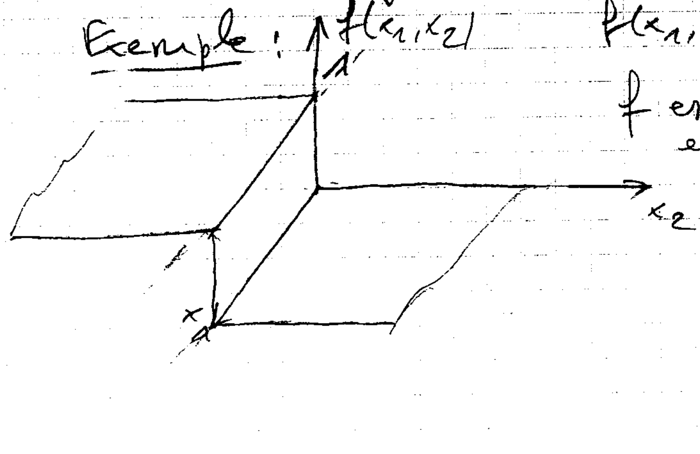
. <u>Exemple</u> : $n = 2$, $p = 1$. Les dérivées partielles



$\partial_1 f(a)$ et $\partial_2 f(a)$ sont respectivement les pentes des tangentes aux deux courbes $\{x_1 \mapsto f_{a,1}(x_1)\}$ et $\{x_2 \mapsto f_{a,2}(x_2)\}$ aux points $x_1 = a_1$ et $x_2 = a_2$.

. <u>Rem</u> ⚠ Une fonction f de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (par exemple) peut être très régulière dans une direction et très irrégulière dans une autre :

<u>Exemple</u> :



$f(x_1, x_2) \equiv f(x_2) \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } x_2 < 0 \\ 0 & \text{si } x_2 > 0 \end{cases}$

f est ∞^t dérivable / à x_1, et discontinue / à x_2

<u>Attention !!</u>

Déf. Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, Ω ouvert, $a \in \Omega$

- On dit que f est différentiable au point a s'il existe l : application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, telle que
$$f(x) := f(a+h) = f(a) + l(\vec{h}) + \|h\| \,\widetilde{\theta}(h),$$
où h est un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On peut le noter $\vec{h}$

$\theta(a+h) := \widetilde{\theta}(h) \to 0$ dans $\mathbb{R}^p$ quand $h \to 0$ dans $\mathbb{R}^n$

- Si l existe, elle est unique. On la note $\left\{\begin{matrix} Df_a(\cdot) \\ \text{ou} \\ (Df(a))(\cdot) \end{matrix}\right\}$. C'est la différentielle de f en a.

Rem. - Si f est linéaire, $Df_a = f$, $\forall a \in \mathbb{R}^n$.

- Si f est affine, i.e. si $f(x) = y_0 + l(x)$, l linéaire, alors $\forall a$, $Df_a = l$.
- Si $f = (f_1, \dots, f_p)$, alors f est différentiable en $x = a$ ssi $\forall i = 1, \dots, p$, f_i est diff. en $x = a$, et dans ce cas
$$Df_a = (Df_{1,a}, \dots, Df_{p,a}).$$
- Comme $Df_a = l$ est linéaire, elle est repérée par une matrice $n \times p$, cf + loin
- On admet l'unicité de l : (exo)

§3 - Propriétés. Opérations sur les dérivées

Exemples : - $f(x,y) := x^2 y + (3x+1) \ln y \in \mathbb{R}$

- $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$; $f(M) := {}^tMM$
- $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$; $f(M) := \det M$

Prop. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$, f différentiable en $a \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω ouvert. Alors f admet une dérivée au point a dans toutes les directions. De plus, $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$,
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a) = f'(a, \vec{v}) = Df_a(\vec{v}) \in \mathbb{R}^p, \text{ et}$$
$$\frac{f(a+t\vec{v}) - f(a)}{t} = \frac{1}{t}\Big[Df_a(t\vec{v}) + \cancel{|t|} \cdot \|\vec{v}\| \underbrace{\theta(a+t\vec{v})}_{0\ (t\to 0)}\Big] \xrightarrow[(t\to 0)]{} Df_a(\vec{v})$$

. Idée de démo : à développer ... noter que $\left|\frac{|t|}{t}\right| = 1$ reste borné quand $t \to 0$ ...

. ⚠ Réciproque fausse : f peut avoir une dérivée en $x = a$ dans toute direction $\vec{v}$ et ne pas être différentiable en $x = a$. Exemple :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

. Alors (exercice) f admet une dérivée directionnelle en $(x_0, y_0) = (0,0)$ dans ~~toute~~ direction (u,v), et cette dérivée directionnelle est nulle.

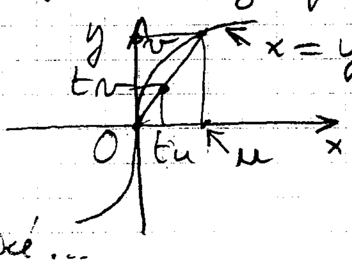
. Montrons que f n'est pas différentiable en $(0,0)$. En effet, si elle l'était, sa différentielle serait nécessairement $l = Df_{(0,0)} = 0$. Vérifions s'il $\exists$ $\theta(x,y)$ tq

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - 0.x - 0.y}{\|(x,y)\|} := \theta(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

Or $|f(x,y)| = \left|\frac{xy^3}{x^2+y^6}\right| := \left|\frac{XY}{X^2+Y^2}\right| \leq \frac{1}{2}$, et $= \frac{1}{2}$ si $X = Y$, i.e. si $x = y^3$. Faisons tendre (x,y) vers $(0,0)$ en imposant $x = y^3$. Alors, quand $y \to 0$

$$\frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = \frac{f(y^3,y)}{\|(y^3,y)\|} = \frac{1/2}{\|(y^3,y)\|} = \frac{1/2}{\sqrt{y^6+y^2}} \sim \frac{1/2}{|y|} \underset{(y\to 0)}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc $\theta(x,y) \underset{(x,y)\to 0}{\not\longrightarrow} 0$



alors que (exo)

$f(tu,tv) \underset{(t\to 0)}{\longrightarrow} 0$, $\forall (u,v)$ fixé ...

. Proposition . Si $f : \underset{\text{ouvert}}{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en a, elle est continue en a

Dém. mq que

$(*)$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha(\varepsilon) > 0$ tq $\forall x \in \Omega, \{\|x-a\| < \alpha(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon\}$.

Or par hypothèse, f est différentiable en a. Donc $\exists l = Df_a$, $\exists \theta(\cdot)$ tq

$|f(x)-f(a) - Df_a(x-a)| \leq \theta(x)\|x-a\|$, avec $\underset{(\|x-a\|\to 0)}{\theta(x) \to 0}$.

Donc $\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \alpha_1(\varepsilon_1) > 0$ tq $\forall x \in \Omega, \{\|x-a\| < \alpha_1(\varepsilon_1) \Rightarrow |\theta(x)| < \varepsilon_1\}$

Choisissons e.g. $\varepsilon_1 = 1$. Comme par ailleurs $|Df_a(x-a)| \leq L\|x-a\|$: $l = Df_a$ est linéaire continue, on obtient, pour tout x tq $\|x-a\| < \alpha_1(1)$.

$|f(x)-f(a)| \leq L\|x-a\| + \theta(x)\|x-a\| \leq (L+1)\|x-a\| < \varepsilon$

dès que $\|x-a\| < \alpha_1(\varepsilon) := \dfrac{\varepsilon}{L+1}$. $\square$

. Rem En particulier, la fonction $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$ n'est pas continue en $(0,0)$, puisque $\forall y, f(y^3,y) = \frac{1}{2}$, donc elle n'est pas différentiable en $(0,0)$. $\square$.

. Expression de la différentielle : si f est différentiable au point $a \in \underset{\text{ouvert}}{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, on a, pour $\vec{v} = x-a$

$$f(x) = f(a) + Df_a(\vec{v}) + \|x-a\|\,\theta(x), \quad \text{avec } \boxed{\underset{(x\to a)}{\theta(x) \to 0}}$$
$$= f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + \|x-a\|\,\theta(x),$$

avec $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_i f(a)$: dérivée partielle de f au point a, / à x_i.

Cette expression est un DL de f à l'ordre 1, au voisinage de a.

. **Vecteur gradient** si $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, on exprime souvent la différentielle au point a par:
$$\ell = Df_a : \vec{v}\in\mathbb{R}^n \mapsto Df_a(\vec{v}) := \langle\vec{\nabla}f(a),\vec{v}\rangle$$
$$:= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, v_i$$
et on note $\vec{\nabla}f(a)$ ou $\nabla f(a)$ ou $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a)$... le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_N}(a)\right)\in\mathbb{R}^n$. On a alors

$$\boxed{f(x) = f(a) + \nabla f(a)\cdot v + \|x-a\|\,\theta(x), \text{ où } \theta(x)\underset{(x\to a)}{\longrightarrow} 0,}$$
si f est différentiable au point a et $\vec{v} = x-a$

Thm (Composition): ** * soit f : U ouvert $\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$, et g : V ouvert $\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$. Supposons que $f(U)\subset V$, que f soit différentiable en $x=a\in U$ et g différentiable en $y=f(a)\in f(U)\subset V$. Alors $g\circ f$ est différentiable en $x=a$ et sa différentielle en a est: $D(g\circ f)_a = Dg_{f(a)}\circ Df_a$. On a alors :
$$\forall i=1,\ldots,n,\quad \frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{p}\frac{\partial g}{\partial y_j}(f(a))\,\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a).$$

. **Exemple** : $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $g: V\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Alors
** *
$$\frac{d}{dx}(g\circ f)(a) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(f_1(a),f_2(a))\cdot f_1'(a) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f_1(a),f_2(a))\cdot f_2'(a)$$
ex $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, $g(y_1,y_2) = \frac{y_1}{y_2}$, avec $f_2(a)\neq 0$.
Alors $(g\circ f)$ est différentiable en a, et $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'(a) = \ldots$ □

§4. Fonctions C^1

Thm : *** soit $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$. On suppose que f admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $\forall i$, $\forall x\in\omega$ ouvert $\subset\Omega$, et que $\forall i=1,\ldots,n$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est continue au point a.
Alors f est différentiable au point a. Donc (DL d'ordre 1)
$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i-a_i) + \|x-a\|\,\theta(x), \text{ où } \theta(x)\underset{(x\to a)}{\longrightarrow} 0$$

. Rem. FAUX si $\forall i$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ n'est pas continue en $x=a$

. Déf On dit que $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est C^1 sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si f a des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ définies et continues en tout point $a \in \Omega$. On note : $f \in C^1(\Omega ; \mathbb{R}^p)$. Alors f est différentiable en tout point $a \in \Omega$ et sa différentielle est l'application linéaire

$$Df_a : \vec{v} \in \mathbb{R}^n \longmapsto Df_a(\vec{v}) \in \mathbb{R}^p$$

qu'on écrit suivant les cas sous la forme

$$Df_a(\vec{v}) = \langle \vec{\nabla} f(a), \vec{v} \rangle, \text{ où } \vec{\nabla} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \text{ si } p=1$$

(***)

$$Df_a(\vec{v}) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a), & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a), & \dots, & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}}_{\text{matrice jacobienne de } f \text{ au point } a, \text{ si } p>1} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i \underbrace{\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial x_i}(a)}_{i^{\text{ème}} \text{ colonne de la matrice}} \in \mathbb{R}^p$$

(écriture en colonnes)

. Rem importante : Rappel : f est continue au point $x = a \in \Omega$ si $\begin{cases} f \text{ est définie au voisinage de } a \text{ et} \\ f \text{ a une limite } \ell \text{ quand } x \to a : \end{cases}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha(\varepsilon) > 0 \text{ tq } \forall x \in \Omega, \{\|x-a\| < \alpha(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\},$$

et si $\ell = f(a)$. La limite doit exister indépendamment de la manière (la direction ...) dont x tend vers a !

. Exemple : $f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Est-ce que $f \in C^1(\mathbb{R}^2 ; \mathbb{R})$? Montrons d'abord que $\forall (x_0, y_0) = P_0$, $\partial_x f(P_0)$ et $\partial_y f(P_0)$ existent.

. D'abord, $\forall (x,y) \neq (0,0)$

$$\underline{\partial_x f(x,y)} = \frac{2xy^4(x^2+y^2) - x^2y^4 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^6}{(x^2+y^2)^2}, \ \underline{\text{et}}$$

$$\underline{\partial_y f(x,y)} = \frac{4x^2y^3(x^2+y^2) - x^2y^4 \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4x^4y^3 + 2x^2y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

existent et sont continues au point (x,y), comme composées de fonctions continues.

. Ensuite, au point $(x_0,y_0)=(0,0)$,

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0,$$

car $\forall x \neq 0$, $f(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0$, et de m

$$\partial_y f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0,$$

car $\forall y \neq 0$, $f(0,y) = \frac{0}{y^2} = 0$.

. Question : est-ce que $\partial_x f$ est continue en $(0,0)$?
m question pour $\partial_y f$? (continuité /aux 2 variables x et y ⚠)

. Réponse : $\forall (x,y) \neq (0,0)$,

$$|\partial_x f(x,y) - \partial_x f(0,0)| = \frac{2|x|y^6}{(x^2+y^2)^2} - 0 = 2|x| \frac{y^2 \cdot y^4}{(x^2+y^2)^2} = 2|x|y^2 \underbrace{\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^2}_{\leq 1^2 = 1}$$

$$\leq 2|x|y^2 \to 0 \quad \text{quand } (x,y)\to(0,0)$$

donc $\partial_x f(\cdot,\cdot)$ est continue en $(0,0)$. Calcul analogue pour $\partial_y f$. Donc $\underline{f \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})}$. Donc $\underline{f \text{ est différentiable } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2}$.

. Rem. Fonctions homogènes : $\underline{f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x,y), \forall \lambda > 0}$.

. Si f est homogène de $d^\circ \alpha$, $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont homogènes de $d^\circ(\alpha - 1)$ (exo).

. Exo dériver les 2 membres de cette égalité /à λ. En déduire l'identité d'Euler pour les fonctions homogènes (de degré α) :

$$\forall x,y, \forall \lambda > 0, \quad x\partial_x f(x,y) + y\partial_y f(x,y) = \alpha f(x,y).$$

. Exo : (i) Soit $F(x,y) := f(x+y,\, x-y)$, $G(x,y) := g(x+y,\, xy)$.
Calculer les dérivées partielles de F / G / à celles de f / g, qu'on suppose définies et continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

(ii) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Calculer le gradient $\nabla(g\circ f)(x_0,y_0)$ et comparer à $\nabla f(x_0,y_0)$. Que pouvez-vous dire de ces deux vecteurs ?

§5 - Dérivées d'ordre supérieur

. Def. Soit $f : \Omega_{\text{ouvert}} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Soit $k \geq 2$, $P_0 \in \Omega$, et $(i_1, i_2, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}$. On définit par récurrence la dérivée d'ordre k dans les directions $i_1, i_2, \dots, i_k$:

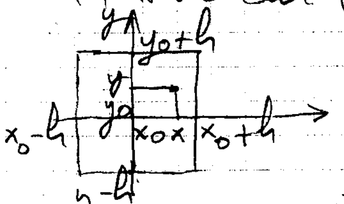
$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}}(P_0) := \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}}\right)(P_0),$$

si cette expression a un sens. Ceci suppose que $\dfrac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}}$ est définie (au moins) en tout point P_0 dans un voisinage de P, et que cette fonction admet une dérivée partielle, / à x_{i_1}, au point P_0.

. Lemme de Schwarz : Soit Ω ouvert $\subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$)

Si $f \in C^2(\Omega)$, alors $\forall (x_0,y_0) \in \Omega$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$

Dém (idée) On choisit $h>0$ tq $]x_0-h, x_0+h[\times]y_0-h, y_0+h[\subset \Omega$ (possible car $(x_0,y_0) \in \Omega$, Ω ouvert). Alors $\forall (x,y)$ dans ce rectangle, $(x,y) \in \Omega$. On pose :



$$A(x,y) = f(x_0,y_0) + f(x,y) - f(x,y_0) - f(x_0,y),$$

et $\psi : y \mapsto f(x,y) - f(x_0,y)$, où on considère x_0, y_0 et x fixés. On a d'abord : $A(x,y) = \psi(y) - \psi(y_0)$, et comme $f \in C^2(\Omega)$, $A \in C^2(\Omega)$ et a fortiori $\psi \in C^2(]y_0-h, y_0+h[)$
$\subset C^1(]y_0-h, y_0+h[)$.

. Donc $\Psi \in C^1([y_0, y])$. On lui applique la formule des accroissements finis :

$$\Psi(y) - \Psi(y_0) = \Psi'(y_0+\theta_1 h)(y-y_0) \quad , \quad 0<\theta_1<1$$
$$= (\partial_y f(x, y_0+\theta_1 h) - \partial_y f(x_0, y_0+\theta_1 h))(y-y_0)$$

Or $\{x \mapsto \partial_y \Psi(x, y_0+\theta_1 h)\} \in C^1(]x_0-h, x_0+h[)$. Donc

$$\Psi(y)-\Psi(y_0) = \left(\partial_x\partial_y f(x_0+\theta_2 h, y_0+\theta_1 h)(x-x_0)\right)\cdot(y-y_0), \quad 0<\theta_2<1.$$

. Mais on peut aussi poser $A(x,y) = \varphi(x) - \varphi(x_0)$, où $\varphi(x) := f(x,y) - f(x,y_0) \in C^2(]x_0-h, x_0+h[) \subset C^1(]x_0-h, x_0+h[)$.

On a alors de même

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0+\theta_3 h)(x-x_0) \quad , \quad 0<\theta_3<1$$
$$= (\partial_x f(x_0+\theta_3 h, y) - \partial_x f(x_0+\theta_3 h, y_0))(x-x_0)$$
$$= \left(\partial_y\partial_x f(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_4 h)(y-y_0)\right)(x-x_0), \quad 0<\theta_4<1$$

. Mais $f \in C^2(\Omega)$. Donc quand $h \to 0$, $\forall \theta_1 \dots \theta_4$,
$\partial_y\partial_x f(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_4 h) \to \partial_y\partial_x f(x_0, y_0)$, et de même
$\partial_x\partial_y f(x_0+\theta_2 h, y_0+\theta_1 h) \to \partial_x\partial_y f(x_0, y_0)$.

Or
$$\frac{A(x,y)}{(x-x_0)(y-y_0)} = \underbrace{\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{(x-x_0)(y-y_0)}}_{\downarrow \; \partial_y\partial_x f(x_0,y_0)} \underset{\text{aussi}}{=} \underbrace{\frac{\Psi(y)-\Psi(y_0)}{(x-x_0)(y-y_0)}}_{\downarrow \; \partial_x\partial_y f(x_0,y_0)}$$

Donc les deux limites sont égales. $\square$

. Avant de terminer ce chapitre, on termine par le Thm fondamental suivant :

<u>DL à l'ordre 2 pour une fonction C^2</u> :

. Thm $(****)$ Soit $f : \underset{\text{ouvert}}{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, de classe C^2.

Alors f admet un DL à l'ordre 2 en tout point a de Ω :

$$(*)\left\{ f(x) = f(a) + Df_a(x-a) + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)(x_i - a_i)(x_j - a_j) + \|x-a\|^2 \theta(x) \right.$$

$\boxed{\text{où } \theta(x) \to 0 \text{ ds } \mathbb{R}^p \text{ quand } x \to a}$

. Commentaire : $(****)$

. Cas particulier important : si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(p=1)$,

↳ alors $Df_a = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) = \{h \mapsto \langle \nabla f(a), h\rangle\}$

$$:= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) h_i$$

on écrit (par abus de langage) : $Df_a = \operatorname{grad} f(a) = \nabla f(a)$:

on assimile le vecteur $\nabla f(a)$ et l'application $\{h \mapsto \langle \nabla f(a), h\rangle\}$

↳ De plus, l'application $(h, k) \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i k_j \in \mathbb{R}$

est une forme bilinéaire, symétrique, car

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ (lemme de Schwarz, car $f \in C^2(\Omega)$)

↳ On écrit cette forme bilinéaire (symétrique) sous la forme : $\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{q(h,k)}} = {}^t h \, D^2 f_a \, k := (h_1, \dots, h_n)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a), & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a), & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$

. si $f = (f_1, \dots, f_p) : \Omega \subset \mathbb{R}^n$, alors la forme bilinéaire est à valeur dans $\mathbb{R}^p$:

$$(h, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \begin{pmatrix} {}^t h \, D^2 f_{1,a} \, k \\ {}^t h \, D^2 f_{2,a} \, k \\ {}^t h \, D^2 f_{p,a} \, k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

1. Rem. On peut toujours écrire $(*)$! L'information est dans : $\boxed{\theta(x) \to 0 \ (x \to a)}$!