Cours d'Analyse Numérique. Master 1.

Ch. 1. Projection hilbertienne. Premières applications

§1 – Rappels sur les espaces hilbertiens (sur $\mathbb{R}$).

- Soit H un e.v. (espace vectoriel) sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On énoncera les résultats sur $\mathbb{R}$. On rappelle les

. Définitions 1 : (****)

- $a : (u,v) \mapsto a(u,v)$ est une forme bilinéaire si $\forall \begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}$, $\{\begin{smallmatrix} v \\ u \end{smallmatrix} \mapsto a(u,v) \in \mathbb{R}\}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}$,

e.g. $a(u, v_1 + \lambda v_2) = a(u,v_1) + \lambda\, a(u,v_2)$

. a est symétrique : $\forall u,v$, $a(u,v) = a(v,u)$

. a est définie >0 (définie-positive) :
$\forall u$, $a(u,u) \geq 0$, et $a(u,u) = 0$ ssi $u = 0$

. a est un produit scalaire : a est une forme bilinéaire symétrique définie >0

. $\|\cdot\|$ est une norme sur H si
(i) $\forall u \in H$, $\|u\| \in \mathbb{R}_+$, et $\|u\| = 0$ ssi $u = 0$
(ii) $\forall u$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda u\| = |\lambda| . \|u\|$
(iii) $\forall u,v \in H$, $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$, ce qui entraîne : $\forall u,v \in H$, $\big|\|u\| - \|v\|\big| \leq \|u-v\|$
(2ème inégalité du triangle : continuité de la norme / à la topologie qu'elle définit sur H).

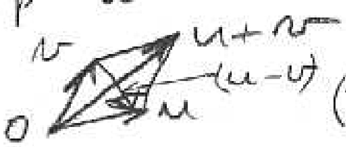
. $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire $a(\cdot,\cdot)$ si $\|u\| := \sqrt{a(u,u)}$

. $\|\cdot\|$ est une norme associée à un produit scalaire $a(\cdot,\cdot)$ ssi elle vérifie l'identité du $\square$ (parallélogramme)

$$\forall u,v \in H, \quad \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right) \quad , (1)$$

et dans ce cas on peut définir le produit scalaire associé par :

$$a(u,v) := \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right), \quad (2)$$



expression qui n'est bilinéaire en u, v que si $\|\cdot\|$ vérifie (1).

. <u>Exo 1</u>: Extension au cas complexe : a <u>sesqui-linéaire</u> :
$a(u, \lambda v) = \lambda a(u,v)$; $a(\lambda u, v) = (\bar{\lambda}) a(u,v)$,
a à symétrie hermitienne : $a(v,u) = \overline{a(u,v)}$;
adapter l'inégalité de Cauchy-Schwarz ci-dessous et l'identité du $\square$ (1) ci-dessus. $\square$

. <u>Inégalité de Cauchy-Schwarz</u> :

$$\forall u, v \in H, \quad |a(u,v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|, \text{ et } = \text{ ssi } u \,//\, v \quad (3)$$

<u>Dém.</u> $\forall \lambda \in \mathbb{R}, T(\lambda) := a(\lambda u + v, \lambda u + v)$
$= \lambda^2 a(u,u) + 2\lambda a(u,v) + a(v,v) \geq 0$,
donc son discriminant $\Delta = 4[(a(u,v))^2 - a(u,u)a(v,v)]$ est ≤ 0, et $\Delta = 0$ ssi $T(\lambda)$ s'annule, <u>i.e.</u> ssi $u \,//\, v$. $\square$

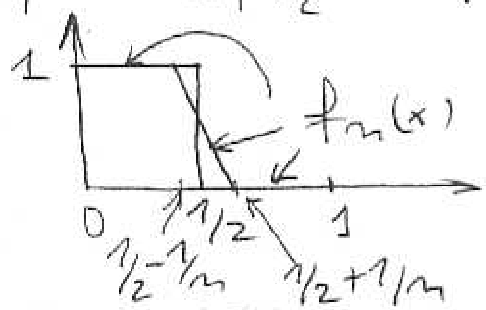
. <u>Def. 2</u> : . Un e.v. H (sur $\mathbb{R}$) est dit <u>préhilbertien</u> s'il est muni d'un <u>produit scalaire</u>, noté $(u,v) := a(u,v)$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.
. On dit que H est un <u>espace de Hilbert</u> s'il est <u>complet</u> pour cette norme, i.e. si toute <u>suite de Cauchy dans H</u> :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tq $\forall n, p \geq N(\varepsilon), \|u_n - u_p\| < \varepsilon$
<u>converge dans H</u> (vers une <u>limite</u> $u \in H$) :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_1(\varepsilon), \|u_n - u\|_H < \varepsilon$.

. <u>Exemple 1</u>: L'espace $\mathbb{R}^N$ est un espace <u>de Hilbert</u> pour $\|x\|_2 := (x_1^2 + \cdots + x_N^2)^{1/2}$. Sur $\mathbb{R}^N$ toutes les normes sont <u>équivalentes</u>, et $\mathbb{R}^N$ est <u>complet</u> pour chacune de ces normes. Par contre, $\forall p \neq 2$, la norme : $x \mapsto \|x\|_p := \begin{cases} (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_N|^p)^{1/p}, & \text{si } 1 \le p < +\infty \\ \max\limits_{1\le i\le N} |x_i| & \text{, si } p = +\infty \end{cases}$

n'est pas associée à un produit scalaire (Exo 2).

• Exemple 2 : L'espace $H = C^0([a,b])$ des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, $-\infty < a < b < +\infty$, est un espace préhilbertien pour

$(f,g)_2 := \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$, mais n'est pas complet pour $\|f\|_2 := \sqrt{(f,f)_2}$. Exemple : $[a,b] = [0,1]$.



La suite (f_n) :

$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le 1/2 - 1/n \\ 1 - 2n(x - 1/2 + 1/n) & \text{si } |x - \frac{1}{2}| \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } 1/2 + 1/n \le x \le 1 \end{cases}$

est de Cauchy dans $H, \|\cdot\|_2$, mais ~~sa~~ limite (dans L^2) : $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le 1/2 \\ 0 & \text{si } 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$ n'est pas continue. $\square$

§ 2 _ Projection hilbertienne sur un convexe complet

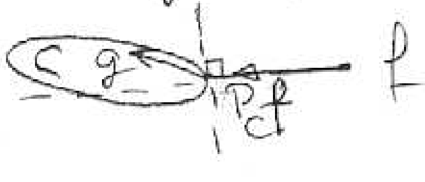
thm 1 : (****)

Soit H préhilbertien et C un convexe complet $\subset H$. En pratique, ou H est Hilbertien et C un convexe fermé ou H est préhilbertien et C un convexe fermé avec $C \subset V$ et $\dim V < +\infty$. Soit $f \in H$. Alors

(i) $\exists !\ \bar{g} := P_C f \in C$ tq $\|P_C f - f\| = \inf\limits_{g \in C} \|g - f\|$ (4)

(ii) $\bar{g} = P_C f$ est caractérisé par l'IV (inéquation variationnelle) : (Trouver $P_C f \in C$ tq)

$$\forall g \in C, \ (P_C f - f, g - P_C f) \ge 0 \qquad (5)$$



Thm 1 (suite) (* * * *)

(iii) Si $C = V_t$ = s.e.v translaté du s.e.v. (sous-espace vectoriel) V, alors l'IV (5) devient :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \tilde{g} = P_C f \in \underline{\underline{V_t}} \text{ tq} \\ \forall g \in \underline{\underline{V}},\ (P_C f - f, g) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

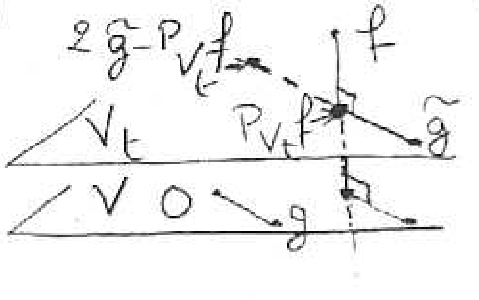
(iv) si $V_t = V$ et si on connaît explicitement une base $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ de V, avec $\dim V = n$, alors (6) se réécrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \tilde{g} = P_C f := \sum_{j=1}^{n} u_j \varphi_j \text{ tq} \\ Au = b, \text{ avec } A := (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}, \\ b := (b_i)_{1 \le i \le n},\ a_{\underline{\underline{i,j}}} := (w_{\underline{\underline{j}}}, w_{\underline{\underline{i}}}), \text{ et} \\ b_i := (f, \varphi_i)_{1 \le i \le n}. \end{cases} \tag{7}$$

(v) De plus la matrice A (: la matrice de Gram du produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ dans la base $\{\varphi_i\}_{1 \le i \le n}$) est une matrice symétrique réelle, définie > 0. Donc elle est inversible : (7) a donc une solution u unique. De plus, toutes ses valeurs propres sont réelles, > 0, et toutes les méthodes numériques adaptées aux matrices de ce type s'appliquent (*)

(vi) $\forall C$, $\{f \mapsto P_C f\}$ est Lipschitzienne de $c^{te} = 1$ (exo)

(*) : e.g. méthode du gradient, du gradient conjugué, de Gauss-Seidel, de surrelaxation de paramètre $\omega \in]0, 2[$ ...



. Dém. du thm 1 : (****)

(i) soit $\alpha := d(f, C) := \inf_{g \in C} \|g - f\| \geq 0$.

Par déf. d'un inf, α est le plus grand minorant de $\{\|g-f\|, g \in C\}$, donc $\forall n, \exists g_n \in C$ tel que $\alpha \leq \|g_n - f\| < \alpha + \frac{1}{n}$. Donc $\exists$ au moins une suite minimisante $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Or C est convexe, donc $\forall g, h \in C, \forall \lambda \in [0,1]$, $\lambda g + (1-\lambda) h \in C$. Appliquons ceci avec $g = g_n$, $h = g_p$, et $\lambda = \frac{1}{2}$: $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $(g_n+g_p)/2 \in C$. D'après l'identité du $\square$: (1), on a par ailleurs :

$$\frac{1}{4}\cdot\left[\|g_n - f + g_p - f\|^2 + \|g_n - f - (g_p - f)\|^2\right] = \left[2\|g_n - f\|^2 + 2\|g_p - f\|^2\right]\cdot 1/4,$$

i.e.

$$\underbrace{\left\|\frac{g_n+g_p}{2} - f\right\|^2}_{\geq \alpha^2} + \left\|\frac{g_n - g_p}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|g_n - f\|^2 + \|g_p - f\|^2\right) \quad (8)$$

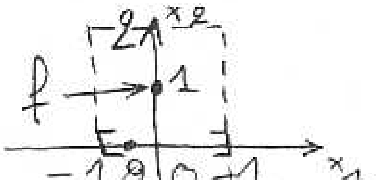
$$\to \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\cdot\alpha^2 = \alpha^2$$

Donc $\|g_n - g_p\| \to 0$ quand $n, p \to +\infty$ indépendamment : la suite (g_n) est donc de Cauchy dans C complet, donc $\exists\, \bar{g} := P_C f$ tel que $\|g_n - \bar{g}\| \to 0$ $(n \to +\infty)$, avec $g \in C$.

La norme étant continue, on en déduit que $g := P_C f$ vérifie (4). Donc (4) admet au moins une solution.

- Cette solution est unique, car si g et $\bar{g}$ sont 2 solutions, alors en appliquant (8), on trouve que $\|g - \bar{g}\| = 0$ donc $g = \bar{g}$

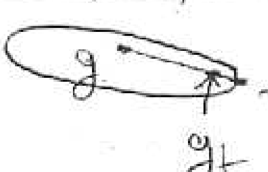
⚠ Rôle de l'identité du $\square$ (1). Exemple : $H = \mathbb{R}^2$, $f = (0,1)$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$, $V := \{(x_1, 0), x_1 \in \mathbb{R}\}$.



Dans ce cas, $\forall\ =(x_1, 0)$, avec $|x_1| \leq 1$, vérifie
$$\|g - f\|_\infty = \inf_{h \in V} \|h - f\|_\infty :$$
Non unicité de la projection de f sur V pour une norme "non strictement convexe". □

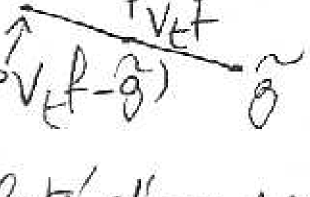
(ii) Dém. (suite) : montrons que (5) $\Rightarrow$ (4). En effet, si $P_C f$ vérifie (5), alors $\forall g \in C$,
$$\|g - f\|^2 = \|g - P_C f + P_C f - f\|^2$$
$$= \underbrace{\|g - P_C f\|^2}_{\geq 0} + 2\underbrace{(P_C f - f / g - P_C f)}_{\geq 0} + \|P_C f - f\|^2 \quad (9)$$
$$\geq \|P_C f - f\|^2 \overset{\boxed{?}}{=} \alpha^2 = (d(f, C))^2,$$
donc $\bar{g} = P_C f$ réalise l'inf. dans (4) : $\|P_C f - f\|^2 = \alpha^2$.

<u>Réciproquement</u>, $\forall g \in C$, $\forall t \in [0, 1]$,



$$g_t := P_C f + t(g - P_C f) = (1-t) P_C f + t g \in C,$$ car C est convexe.. Donc, remplaçons g par g_t dans (9). On obtient :
$$\|g_t - f\|^2 = t^2 \|g - P_C f\|^2 + 2t (P_C f - f, g - P_C f) + \|P_C f - f\|^2$$
$$\geq \|P_C f - f\|^2 = \alpha^2 = (d(f, C))^2,$$
car $P_C f$ vérifie (4). En faisant tendre t vers 0_+, on en déduit (5).

(iii) Si $C = V_t$, alors $\forall \tilde{g} \in V_t$,



le symétrique de $\tilde{g}$ /à $P_{V_t} f$, i.e. $2 P_{V_t} f - \tilde{g} := h \in V_t$,
car V_t est un sous-espace translaté d'un s.e.v.

Donc (5) devient :
$$\forall \tilde{g} \in V_t, \ \Big(P_C f - f, \pm(\underbrace{\tilde{g} - P_C f}_{:= g \in V})\Big) \geq 0, \text{ donc } = 0.$$

Comme $\forall \psi$ fixée $\in V_t$, $\tilde{g} \mapsto \tilde{g} - \psi$ est une bijection de V_t sur V, ceci $\Leftrightarrow$ à (6).

(iv) si $C = V_t = V$ et si $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ est une base de V, alors (6) $\Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, m$, $(P_C f - f, \varphi_i) = 0$. (6')
On obtient (7) en posant $P_C f := \sum_{j=1}^{m} u_j \varphi_j$ et en utilisant la linéarité de $(\cdot, \varphi_i)$.

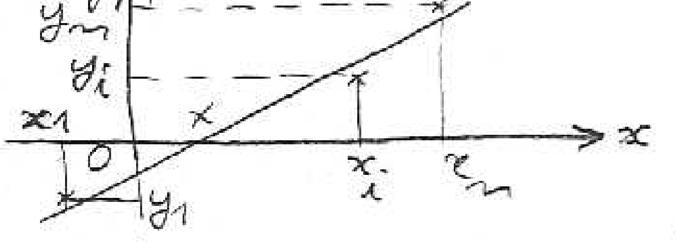
(v) Montrons que $\forall \xi \in \mathbb{R}^m$, $\xi \neq 0$, on a :

$$0 < {}^t\xi A \xi := \sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j} \xi_i \xi_j = (\xi_1, \dots, \xi_m) \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}$$

En effet,
$$ {}^t\xi A \xi = \sum_{i,j=1}^{m} (\varphi_j, \varphi_i) \xi_j \xi_i = \left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j \varphi_j, \sum_{i=1}^{m} \xi_i \varphi_i \right) = (h, h) \geq 0,$$
où $h := h(\xi) = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \varphi_j$, et $(h, h) = 0$ ssi $h = 0$, i.e. ssi $\xi = 0$. $\square$

§3 - Premières applications :

A) Lissage aux moindres carrés : soient $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ données, $1 \leq i \leq m$. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tq pour $p_1, \dots, p_m$ donnés > 0



$$F(a,b) := \sum_{i=1}^{m} p_i (y_i - a x_i - b)^2$$

vérifie $F(a,b) := \inf_{(c,d) \in \mathbb{R}^2} F(c,d)$. (10)

On pose indifféremment.
$H := \{ f : \{x_1, \dots, x_m\} \to \mathbb{R} \}$ fonctions discrètes $\cong \mathbb{R}^m$ ou $H := \{ y = (y_1, \dots, y_m) \} = \mathbb{R}^m$

et $V := \{g : x \in \{x_1, \dots, x_n\} \mapsto a\varphi_1(x) + b\varphi_0(x)\}$,
où $\varphi_1 : x \in \{x_1, \dots, x_n\} \mapsto x$ et $\varphi_0 : x \in \{x_1, \dots, x_n\} \mapsto 1$,

ou $V := \{ y := (y_1, \dots, y_n) := a(x_1, \dots, x_n) + b(1, \dots, 1)\}$.

Par exemple, dans le 1^{er} cas, noter que la fonction
$f : x \in \{x_1, \dots, x_n\} \mapsto f(x) := (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) \in \mathbb{R}$
vérifie $f \equiv 0$!

On connaît une base $\{\varphi_0, \varphi_1\}$ de V. Ensuite,
$$(f, g) := \sum_{i=1}^{n} \underbrace{p_i}_{>0} f(x_i)\, g(x_i)$$
est un produit scalaire sur $H \equiv \mathbb{R}^n$. Donc
$P_V f := a\varphi_1 + b\varphi_0$ est caractérisé par (10).

On est donc ramené à résoudre le système général (7), qui se récrit ici

$$\begin{pmatrix} (\varphi_1, \varphi_1), & (\varphi_0, \varphi_1) \\ (\varphi_1, \varphi_0), & (\varphi_1, \varphi_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \varphi_1) \\ (f, \varphi_0) \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Par exemple, si $\forall i, p_i = 1$, on obtient :

$$\begin{cases} (\varphi_1, \varphi_1) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 \,; (\varphi_0, \varphi_1) = (\varphi_1, \varphi_0) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \\ (\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{i=1}^{n} p_i \quad ; (f, \varphi_k) = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i x_i^k, \, k = 0, 1 \end{cases} \qquad (12)$$

B) <u>Polynômes orthogonaux</u> :
soit $-\infty < a < b < +\infty$ et $p(\cdot)$ une fonction continue sur $]a, b[$, intégrable sur $[a, b]$. On considère $H := C^0([a, b])$, espace <u>préhilbertien</u> pour le produit scalaire

$$(f, g) := \int_a^b p(x)\, f(x)\, g(x)\, dx, \qquad (13)$$

et $V_n := \mathcal{P}_n$ l'espace des fonctions-polynômes
$P : \{x \mapsto \sum_{j=0}^{n} a_j x^j\}$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
Bien sûr, $\dim V = n+1 < +\infty$.
Alors $\forall f \in H$, sa projection $\perp$: $P_n f := P_{V_n} f$
sur V_n est caractérisée par :

$$\begin{pmatrix} (1,1), (x,1), \dots, (x^n,1) \\ (1,x), (x,x), \dots, (x^n,x) \\ \vdots \\ (1,x^n), (x,x^n), \dots, (x^n,x^n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,1) \\ (f,x) \\ \vdots \\ (f,x^n) \end{pmatrix}, \qquad (14)$$

cf TD pour les détails. Par exemple, pour $(a,b) = (0,1)$ et $p(x) \equiv 1$, la matrice A au 1^{er} membre de (14) est la matrice dite de Hilbert, de terme général

$$a_{i,j} := \frac{1}{i+j+1}, \quad 0 \leq i,j \leq n \qquad (15)$$

Elle est symétrique définie-positive, mais très mal conditionnée, cf cours de Licence.

. Il est donc très souvent utile de remplacer la base $\{1, x, \dots, x^n\}$ par une base de polynômes orthogonaux (ou ortho-normaux) pour le produit scalaire considéré. Par exemple, cf TD, pour $(a,b) = (-1,1)$ et $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, la famille de

Polynômes orthogonaux associée est définie par
$T_k(x) := \cos(k\,\theta(x))$, $\forall x \in [-1,+1]$, où
$\theta(x) := \operatorname{Arc\cos} x \in [0,\pi]$: ce sont les Polynômes de Tchebycheff (de $1^{ère}$ espèce).

Rem. Une très jolie – et très utile ! – application des Polynômes $\perp$ est la méthode d'intégration approchée de Gauss, cf TD.

C) <u>Séries de Fourier</u> : cf chapitre correspondant.

§4 - <u>Exemple de problème variationnel formel : résolution d'un problème de Dirichlet (non) homogène</u>

. Soit $-\infty < a < b < +\infty$

. On considère le pb :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_t \text{ tel que } \boxed{J(u) = \inf_{v \in V_t} J(v),} & (16) \\ \text{avec } \begin{cases} J(v) := \frac{1}{2} \underbrace{a(v,v)} - \underline{L(v)} \\ := \underbrace{\frac{1}{2} \int_a^b (v'(x))^2 dx} - \int_a^b f(x) v(x) dx, \end{cases} & (17) \end{cases}$$

où f est une fonction donnée, e.g. $f \in C^0([a,b])$,

$$\text{et } V_t := \left\{ v \in H ; \begin{cases} v(a) = \alpha \text{ donné} \\ \text{et } v(b) = \beta \quad \text{"} \end{cases} \right\} \qquad (18)$$

. La question est de choisir l'espace H de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ - Supposons que tous les calculs soient licites, et notons que V_t est un translaté du s.e.v.

$$V := \{ v \in H, \ v(a) = 0 = v(b) \}. \qquad (18')$$

. Supposons que u est solution de (16). Alors $\forall v \in \underline{\underline{V}}, \forall h \in \mathbb{R}, u + hv \in \underline{\underline{V_t}}$. Donc en adaptant la dém. du thm 1, on obtient :

$$\boxed{\forall v \in V, \ a(u,v) - L(v) = 0, \text{ avec } u \in V_t,} \qquad (19)$$

car a est bilinéaire symétrique (≥ 0) et L linéaire.

. Réciproquement, si $u \in V_t$ vérifie (19), alors u vérifie (16), avec le même raisonnement. Donc - <u>formellement</u> - <u>(16) ⟺ (19)</u> :

• maintenant, supposons qu'on ait le droit d'intégrer par parties dans la 1ère intégrale de (19). On obtient :

$$u \in V_f \text{, et } \forall v \in V, \int_a^b u'(x)\, v'(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, v(x)\, dx$$

$$\int_a^b (-u''(x))\, v(x)\, dx + \underbrace{\cancel{\left[u'(x)\, v(x)\right]_a^b}}_{\substack{= 0 \\ \text{car } v \in V}} =$$

• Donc on obtient :

$$\underline{\forall v \in V}, \int_a^b \underbrace{\left(-u''(x) - f(x)\right)}_{=0} v(x)\, dx = 0 \qquad (20)$$

• C'est un résultat classique, e.g. au sens des distributions, que ceci entraîne :

$$\boxed{\begin{cases} -u'' = f & \text{dans }]a,b[\\ \text{et } u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta \end{cases}} \qquad (21)$$

puisque $u \in V_f$. Exemple : $f \equiv 0$

• on a donc — formellement — résolu le Problème de Dirichlet (21) (homogène si $(\alpha, \beta) = (0,0)$), en se ramenant au pb de minimisation (16), par l'intermédiaire du pb (19), appelé "formulation variationnelle" du pb (21).

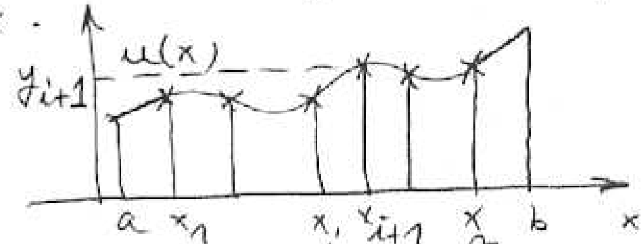
• Les pbs (16) et (19) se résolvent "naturellement" dans un cadre hilbertien : les espaces de Sobolev. En particulier, si $V = V_f$, l'∃ et l'unicité de la solution de (19) est assurée par le thm de Lax-Milgram, appliqué à $V = H_0^1(]a,b[)$ ...

§5 - Idées sur les fonctions-splines : (cf e.g. [MS] : M. Schatzman : Analyse Numérique, Inter Editions).

. On pose $V_t := \{ f \in H \,;\, f(x_i) = y_i,\ 1 \le i \le n \} := V_y$, (22)
où $-\infty < a < x_1 < x_2 < \dots < x_N < b < +\infty$, et les y_i, $1 \le i \le n$ sont donnés, et H est un e.v. non (encore) précisé, tq tous les calculs ci-dessous sont licites.
V_t est donc un s.e.v. translaté de $V := V_0$.

. on considère le pb :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_t \text{ tq } J(u) = \inf\limits_{v \in V_t} J(v), \\ \text{où } J(v) := \displaystyle\int_a^b (v''(x))^2\, dx . \end{cases} \qquad (23)$$



Rappel : la courbure de la courbe $\{x \mapsto u(x)\}$ au point x est $\dfrac{u''(x)}{(1+(u'(x))^2)^{3/2}} \simeq u''(x)$ si $|u'(x)| << 1$. On minimise donc ($\simeq$) l'énergie de flexion, liée à la courbure de cette courbe.

. Comme dans les exemples précédents, on voit que (23) $\iff$

$$\forall v \in V, \quad \int_a^b u''(x)\, v''(x)\, dx \overset{(\geq)}{\underset{(\leq)}{=}} 0, \qquad (24)$$

car $\forall v \in V$, $\forall u \in V_t = V_y$, $u + hv \in V$, $\forall h \in \mathbb{R}$
$J(u+hv) \geq J(u)$ $\left(\forall h \in \mathbb{R}, \forall v \in V\right)$ ssi u vérifie (24).

. Supposons que $u|_{[x_i, x_{i+1}]} := u_i \in C^4([x_i, x_{i+1}])$.
Alors $\forall v \in C^2_c(]x_i, x_{i+1}[)$, en intégrant deux fois par parties (24), on obtient :

$$\forall v \in C^2_c(]x_i, x_{i+1}[), \quad \int_a^b u^{(4)}(x)\, v(x)\, dx + \Big[\cancel{u''v' - u'''v}\Big]_{x_i}^{x_{i+1}} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} u^{(4)}(x)\, v(x)\, dx = 0 \qquad (25)$$

Donc $\forall i = 0, \dots, n$, $u^{(4)} \equiv 0$ sur $]x_i, x_{i+1}[$,
où on a posé $x_0 = a$, $x_{n+1} = b$.

Donc $\forall i = 0, \dots, n$, $u_i = u|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_3$ (Polynômes de d° 3).

. Maintenant, $\forall v \in C_c^2([a, x_1[)$, $\forall h \in \mathbb{R}$, on a encore : $u + hv \in V_f$. Donc le même raisonnement entraîne :

$\forall v \in C_c^2([a, x_1[)$, $\int_a^b u^{(4)}(x) v(x) dx + (-u''(a) v'(a) + u'''(a) v(a)) = 0$,

mais cette fois-ci $v(a)$ et $v'(a)$ sont qlcq. Donc non seulement $u|_{[x_0, x_1]} = u_0 \in \mathcal{P}_3$, mais $u_0'''(x) \equiv u'''(a) = 0$, donc $u_0 \in \mathcal{P}_2$, puis $u''(x) \equiv u''(a) = 0$,

$$\begin{cases} \text{donc } u_0 = u|_{[a, x_1]} \text{ (et de même } u_n = u|_{[x_n, b]}) \in \mathcal{P}_1 \\ \text{et } \forall n = 1, \dots, n-1,\ u|_{[x_i, x_{i+1}]} = u_i \in \mathcal{P}_3. \end{cases} \quad (26)$$

. On vérifierait de même que $\forall i = 1, \dots, n$, en prenant $v \in C_c^2(]x_{i-1}, x_i[)$ et en intégrant par parties séparément sur $[x_i, x_{i+1}]$ et sur $[x_{i-1}, x_i]$, on obtient finalement

$$(u_i''(a) - u_{i-1}''(a)) v'(a) - (u_i'''(a) - u_{i-1}'''(a)) v(a) = 0 \quad (27)$$

(en utilisant les résultats précédents). Donc la solution $u \in C^2([a, b])$.

. Finalement, on cherche donc $u \in S$, où S est l'ensemble des <u>fonctions-splines d'interpolation</u>, ici

$$V_f \cap S := V_f \cap \left\{ s \in C^2([a,b]),\ s|_{[x_i, x_{i+1}]} := s_i \in \mathcal{P}_3, 1 \le i \le n-1, \right.$$
$$\left. s_0 := s|_{[a, x_1]} \text{ et } s_n := s|_{[x_n, b]} \in \mathcal{P}_1 \right\}. \quad (28)$$

. On montre alors – cf T.D. – qu'une telle spline "cubique" est déterminée de manière unique. En effet, chaque s_i, $1 \le i \le n-1$ dépend linéairement de 4 coefficients, s_0 et s_n dépendent chacun de 2 coefficients. Il y a donc $4 \cdot (n-1) + 4 = 4n$ inconnues.

- Par ailleurs, la continuité de s, s', s'' en $x_i, 1 \leq i \leq n$ donne n équations : S est donc un e.v. de dimension n, et les n équations : $s(x_i) = y_i, 1 \leq i \leq n$, où $s(x_i) = s_{i-1}(x_i) = s_i(x_i)$ fournissent au total $4n$ équations linéaires.
- En résolvant, en prenant comme inconnues soit les $s''(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, soit les $[s'''(x_i)] := s'''_i(x_i) - s'''_{i-1}(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, qu'on obtient bien une unique solution $u := s \in V_t \cap S$, qui est donc (l'unique) solution du pb (23).

- La justification de calculs résulte du :

Lemme : [MS], [HB] := H. Brézis, Analyse Fonctionnelle]

i) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue et à support compact. Alors $\exists\, g$ (resp. f) tq $h = g'$ (resp. $h = f''$) ssi $\int_{\mathbb{R}} h(x)\,dx = 0$ (resp. idem, et $\int_{\mathbb{R}} x\, h(x)\,dx = 0$). (29)

(ii) $\forall h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, à support compact dans $]a,b[$, $\exists\, P \in \mathcal{P}_1$ (pol. de $d^\circ \leq 1$) tq $(h - P)$ est la dérivée seconde de f, avec $f \in C^2(\mathbb{R})$ et support de $f \subset [a,b]$.

(iii) Soit $H = L^2(a,b)$ tq $\forall f \in C^2(\mathbb{R})$, à support compact $\subset]a,b[$, on ait : $(u, g'') = \int_a^b u g''\,dx = 0$.
Alors $u \in \mathcal{P}_1$.

Dém. Exo, ou [MS]

- La justification profonde utilise encore la notion d'espace de Sobolev, ici de
$$H^2(a,b) := \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \,;\, \exists\, h \in L^2(a,b) \text{ tq } f(x) = \int^y \left(\int^z h(x)\,dx \right) dy \right\},$$
qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :
$$(u,v)_{H^2(a,b)} := \int_a^b (uv \quad u'v' + u''v'')(x)\,dx. \quad \square$$