Ch. 3. Espaces de Hilbert

- On se limite au cas d'un espace de Hilbert H sur $\mathbb{R}$, sauf indication contraire
- Pour la partie : Projection sur un convexe complet $C \subset H$, cf Polycopié du Cours d'Analyse Numérique (Ch. 2)

§ 1. Orthogonalité. Bases Hilbertiennes :

- **Prop 1** : Soit E préhilbertien. Soit $(e_1, \dots, e_N)$ un système de vecteurs deux à deux orthogonaux : $\forall i \neq j$, $(e_i, e_j) = 0$. Alors
$$\|e_1 + \dots + e_N\|^2 = \|e_1\|^2 + \dots + \|e_N^2\| \quad \text{(Pythagore)}$$
De plus, si la suite $(e_n)_{n \geq 1}$ est ortho-normale, alors $\forall x \in E$, on a : $\sum_{n \geq 1} |(e_n, x)|^2 \leq \|x\|^2$ (inégalité de Bessel - Parseval)

Dém. : évidente pour Pythagore (par récurrence). Pour Bessel-Parseval, on pose $x_N = \sum_{n=1}^{N} (e_n, x) e_n$, $\forall N$. Par Pythagore, $\|x_N\|^2 = \sum_{n=1}^{N} (e_n, x)^2 \underset{\text{aussi}}{=} (x_N, x)$ (vérifier)

Or $\|x\|^2 = \|(x - x_N) + x_N\|^2 = \|x - x_N\|^2 + \|x_N\|^2$. La série $\sum_{n \geq 1} |(e_n, x)|^2$ est donc ACV, de somme $\leq \|x\|^2$.

- Orthogonal d'une partie B de E préhilbertien :

Prop 2 : Soit $B \subset E$. On note $B^\perp := \{x \in E \,;\, \forall b \in B, (b, x) = 0\}$ c'est un sous-espace vectoriel fermé de E, et $B \cap B^\perp = \{0\}$. Si $B \subset C$, alors $C^\perp \subset B^\perp$. De plus, $B^\perp = (\mathrm{Vect}(B))^\perp = (\overline{\mathrm{Vect}(B)})^\perp$, où $\mathrm{Vect}(B)$ désigne le s.e.v. engendré par B.

Dém. exercice, ou FP (F. Poupaud), p 43.

Déf. 1 : Soit $\mathscr{C} \subset E$. On dit que $\mathscr{C}$ est total ssi le s.e.v. engendré $\mathrm{Vect}(\mathscr{C})$ est dense dans E

Prop. 3 :

i) si $\mathscr{C}$, sous-ensemble de E, est total, et E préhilbertien, alors $\mathscr{C}^\perp = \{0\}$

(ii) Si $E = H$ est un espace de Hilbert, alors la réciproque est vraie, donc $\mathscr{C}$ est total dans H ssi $\mathscr{C}^\perp = \{0\}$.

Dém i) supposons que $\mathscr{C}^\perp \neq \{0\}$. Soit $x \in \mathscr{C}^\perp$.
Alors $\forall y \in \mathrm{Vect}(\mathscr{C})$, on a
$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y^2\|$, donc $\|x\| \leq \|x-y\|$.
Donc $\inf\limits_{y \in \mathrm{Vect}(\mathscr{C})} \|x-y\| = d(x, \mathrm{Vect}(\mathscr{C})) \geq \|x\| > 0$.
Donc $\overline{\mathrm{Vect}(\mathscr{C})}$ n'est pas dense dans E.
(ii) cf Prop 4 ci-dessous, avec $V = \overline{\mathrm{Vect}(\mathscr{C})}$, $(\overline{\mathrm{Vect}(\mathscr{C})})^\perp = \mathscr{C}^\perp$. $\square$

Prop 4 : Soit H espace de Hilbert, et V un s.e.v fermé de H. Alors $H = V \oplus V^\perp$, et $V^{\perp\perp} = V$.

Dém V est fermé dans H complet, donc V est complet.
D'après le thm de projection hilbertienne, $\forall x \in H$,
on a : $x = P_V x + (x - P_V x) \in V + V^\perp$, et la somme est directe, car $V \cap V^\perp = \{0\}$ (sinon, il existerait $x \in V \cap V^\perp$, $x \neq 0$, tel que $(x, x) = 0$).
Donc $H = V \oplus V^\perp$: somme directe. De plus,
$V \subset V^{\perp\perp}$ (évident). Or $\forall x \in V^{\perp\perp}$, $\underset{\cap\, V^{\perp\perp}}{x} = \underset{\cap\, V \subset V^{\perp\perp}}{P_V x} + \underset{\cap\, V^\perp}{x - P_V x}$.

Donc $x - P_V x \in V^{\perp\perp} \cap V^\perp = \{0\}$.
Donc $V = V^{\perp\perp}$. $\square$

• **Exercice** : Procédé d'ortho-normalisation de Gram-Schmidt.

• **Déf.** Soit $(E_n)_{n \geq 1}$ une suite de s.e.v. fermés de H Hilbert. On dit que H est somme hilbertienne des E_n : $H = \bigoplus_{n \geq 1} E_n$ si

(i) les E_n sont deux à deux $\perp$, et

(ii) le s.e.v. engendré par les (E_n) est dense dans H.

• **Thm 1** : On suppose que $H = \bigoplus_{n \geq 1} E_n$. Soit $x \in H$, (H Hilbert) et $x_n := P_{E_n} x$. Alors

(i) $x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, i.e. $x = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=1}^{k} x_n$

(ii) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^2$ (égalité de Bessel-Parseval)

Réciproquement, pour toute suite (x_n) de H telle que $\forall n, x_n \in E_n$, et $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^2 < +\infty$, alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ CV dans H, et sa somme x vérifie : $\forall n, \ x_n = P_{E_n} x$.

Dém. Soit $S_N : x \longmapsto \sum_{n=1}^{N} P_{E_n} x := \sum_{n=1}^{N} x_n$. Comme dans la Proposition 1, $\forall x \in H$, $\|S_N x\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^2$, et $\|x_n\|^2 = (x_n, x)$. En sommant, $\|S_N x\|^2 = (S_N x, x) \leq \|S_N x\| \cdot \|x\|$ Cauchy-Schwarz

Donc $\forall N$, $\|S_N x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^2 \leq \|x\|^2$. Soit F le s.e.v.

engendré par les E_n. Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in F$ tq $\|x_\varepsilon - x\| < \varepsilon$. Or F est l'ensemble des combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs $\in \bigcup_n E_n$. Donc pour $N \geq N(\varepsilon)$ assez grand, on a :

$S_N x_\varepsilon = x_\varepsilon$. Par ailleurs, on a $\|S_N x\| \leq \|x\|$, $\forall x \in H$. Donc $\|S_N x_\varepsilon - S_N x\| \leq \|x_\varepsilon - x\| < \varepsilon$

Donc $\forall N \geq N(\varepsilon)$, $\|S_N x - x\| \leq \|S_N x - \underbrace{S_N x_\varepsilon}_{= x_\varepsilon}\| + \|x_\varepsilon - x\| < 2\varepsilon$.

Donc $S_N x = \sum_{n=1}^{N} x_n \xrightarrow[(n \to +\infty)]{} x$ (CV dans H), d'où (i). Ensuite, ceci entraîne : $\|S_N x\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^2 \to \|x\|^2$, d'où (ii). Réciproquement, si $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^2 < +\infty$, alors la suite des sommes partielles de rang n est une suite de Cauchy dans H complet, donc $\exists x \in H$ tq $S_N x \xrightarrow[(N \to +\infty)]{} x$ et $\forall n$, $x - x_n = \lim_{N \to +\infty} (S_N x - x_n) \in E_n^\perp$, donc $x_n = P_{E_n} x$, $\forall n \geq 1$, et on a encore l'égalité de Bessel-Parseval. $\square$

- **Def** : on dit qu'une suite $(e_n)_{n \geq 1}$ est une base hilbertienne de H espace de Hilbert tq
  (i) $\forall n, p$, $(e_n, e_p) = \delta_{n,p}$ (Kronecker) : la suite est $\perp$ normale, et
  (ii) L'e.v. engendré par les e_n est dense dans H : la suite est totale :

On ne dit pas que l'e.v. engendré par les e_n est égal à H !

- Corollaire : Si H admet une base Hilbertienne (e_n), $\forall x \in H$, $x = \sum_{n=1}^{+\infty} (x, e_n) e_n$, et $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |(x, e_n)|^2$

. **Thm 2 :** Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.

Rappel : Déf. un espace normé (ou métrique) E est dit séparable s'il existe un sous-ensemble dénombrable dense dans E.

Exemples : . $\mathbb{R}$ est séparable ($\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$)
. $L^p(\Omega)$ est séparable, $\forall\, 1 \leq p < +\infty$
. $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable
. $C^0(\overline{\Omega})$ est séparable.

} cf TD

Dém. du Thm 2. Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ une partie dénombrable dense de H, H Hilbert, et soit F_N le s.e.v. engendré par $v_1, \dots, v_N$. Alors $\bigcup_{N=1}^{+\infty} F_N$, union d'une suite croissante de s.e.v., est dense dans H. On choisit une base $\perp$normale de F_1, qu'on complète en une base $\perp$normale de F_2... On obtient une base Hilbertienne de H.

§2. Théorèmes de Riesz et de Lax-Milgram.

. Thm de Riesz - Fréchet : (****)

Thm 3 : Soit H un espace de Hilbert. Soit $\ell \in H'$ une forme linéaire continue sur H. Alors $\exists !\, f \in H$ tel que

$$\forall v \in H, \quad (f, v) = \ell(v) = \langle \ell, v\rangle_{H' \times H}.$$

De plus $\|f\|_H = \|\ell\|_{H'} = \sup_{\substack{v\in H\\ v\neq 0}} \dfrac{|\langle \ell, v\rangle|}{\|v\|_H}$.

Dém. Soit $N = \mathrm{Ker}(\ell) = \ell^{-1}(\{0\})$. Donc N est un s.e.v. fermé de H. Si $N = H$, alors $f = 0$ vérifie : $(f, v) = \ell(v) = 0$, $\forall v \in H$. Si $N \subsetneq H$, construisons un $g \in H \setminus N$ tel que $g \perp N$ et $\|g\|_H = 1$. Ceci est possible : en effet, ...

... soit $g_0 \in H \setminus N$, et soit $g_1 = P_N g_0$. On a alors :
$(g_0 - g_1) \perp N$. Posons $g = \frac{g_0 - g_1}{\|g_0 - g_1\|}$: $g \perp N$, et $\|g\|_H = 1$.

Alors $\forall v \in H$, $v = \lambda_v g + w_v$, $\lambda_v \in \mathbb{R}$, $w_v \in N$,
avec $\lambda_v = \frac{\ell(v)}{\ell(g)}$. $\forall w \in N$, $\ell(w) = 0$

et $\forall v \in H$, $\underset{\sim\sim}{\ell(v)} = \ell(\lambda_v g) + \underbrace{\ell(w_v)}_{} = \lambda_v \ell(g) = \lambda_v \ell(g) \underbrace{(g,g)}_{1}$

En particulier, $\ell(g) = \ell(g)(g,g) = (\ell(g) g, g)$

Posons $\underline{f = \ell(g) g}$. On a donc

$\forall v \in H$, $(f, v) = (\ell(g) g, v) = (\ell(g) g, \underbrace{\frac{\ell(v)}{\ell(g)}}_{\lambda_v} g + \underset{N}{w_v})$, car $(g, w_v) = 0$

$$= (\cancel{\ell}(g) g, \frac{\ell(v)}{\cancel{\ell(g)}} g) = \ell(v).1.$$

On vérifie ensuite que d'après Cauchy-Schwarz,
$\forall v \in H$, $|\ell(v)| = |(f, g)| \leq \|f\|_H . \|v\|_H$, et que l'égalité n'est possible que si v est co-linéaire à f. Donc
$\|\ell\|_{H'} = \|f\|_H$. $\square$

· <u>Conséquence</u> : L'application $\ell \in H' \mapsto f \in H$ est un isomorphisme isométrique, donc bicontinu (continu, et d'inverse continu. <u>On peut identifier H à H'</u>.

· <u>Remarque</u> : <u>Cas de deux espaces de Hilbert</u>

On suppose que V et H sont deux espaces de Hilbert réels (e.g.), avec <u>$V \subset H$</u>, <u>V dense dans H</u>, et <u>$i : V \to H$</u> (l'injection canonique) <u>continue</u>, donc
$\exists C > 0$; $\forall v \in V$, $\|v\|_H \leq C \|v\|_V$

Alors on définit l'injection $i' : H \to V'$ par
$\forall f \in H$, $i'(f) := \varphi_f : v \in V \subset H \mapsto \boxed{\varphi_f(v) := (f, v)_H}$

Donc $\forall f \in H$, $|\varphi_f(v)| = |(f, v)_H| \leq \|f\|_H . \|v\|_H$
$$\leq \|f\|_H \, C \|v\|_V,$$

Donc $\forall f \in H$, $\varphi_f \in V'$ et $\|\varphi_f\|_{V'} \leq C . \|f\|_H$.

Donc i' : $f \in H \mapsto \varphi_f \in V'$ est linéaire continue, de norme $\leq C$. Ensuite, i' est une injection, car si $i'(f) = \varphi_f \in V'$, on a : $\forall v \in V$, $(f, v)_H = \varphi_f(v) = 0$, donc $f = 0$, car V est dense dans H.
Enfin, on admettra (exo) que $i'(H)$ est dense dans V'.
En général, $i'(H) \neq V'$. La situation typique sera vue en TD : $V = H^1_0(\Omega)$ ou $H^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$.

Retenons : si $V \hookrightarrow H$, i.e. si $V \subset H$, V dense dans H, avec $i : V \to H$ continue, alors on peut identifier H à V' par i' : $f \in H \mapsto \varphi_f \in V'$. Si on décide de plus d'identifier H à H' par le Thm de Riesz-Fréchet, on obtient $\boxed{V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V'}$ ****

Mais alors on ne peut plus identifier V et V'.

. Thm de Lax-Milgram [cas symétrique, réel]

Thm 4 : **** Soit V un espace de Hilbert réel

. Soit a une forme bilinéaire : $V \times V \to \mathbb{R}$, continue, i.e.
(i) $\exists \beta > 0$; $\forall u, v \in V$, $|a(u,v)| \leq \beta \|u\|_V \cdot \|v\|_V$
. On suppose de plus que a est V-elliptique (ou "coercive") :
(ii) $\exists \alpha > 0$; $\forall v \in V$, $a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2$
. Soit $\ell \in V'$, i.e. soit ℓ une forme linéaire continue :
(iii) $\exists \gamma > 0$; $\forall v \in V$, $|\ell(v)| \leq \gamma \|v\|_V$ (ex. $\gamma = \|\ell\|_{V'}$).
. Alors $\exists!\, u \in V$ tel que
$$\forall v \in V, \quad a(u,v) = \ell(v) \qquad \text{(FV)}$$
De plus l'application $\Lambda : \ell \in V' \mapsto u \in V$ est bijective et bicontinue : $\alpha \|u\|_V \leq \|\ell\|_{V'} \leq \beta \|u\|_V$ (*)
. Le Thm est valable même si a n'est pas symétrique, mais si a est symétrique, alors u est caractérisée par :
$$J(u) := \frac{1}{2} a(u,u) - \ell(u) = \min_{v \in V} J(v) \qquad \text{(PV)}$$

(*) et dans le cas complexe

Dém. : dans le cas symétrique, réel, les hypothèses (i) et (ii) entraînent que $a(\cdot,\cdot)$ est un produit scalaire dont la norme associée $|||v||| := \sqrt{a(v,v)}$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|$: $\sqrt{\alpha}\|v\| \le |||v||| \le \sqrt{\beta}\,\|v\|, \forall v$. V est donc aussi complet (et ℓ continue) pour $|||\cdot|||$. On applique donc le thm de Riesz. Noter que par rapport à $|||\cdot|||$, les constantes α et β dans (i) et (ii) deviennent :

$$a(v,v) = \underset{\overset{\shortparallel}{\alpha}}{1} \cdot |||v|||^2 \; ; \; |a(u,v)| \le \underset{\overset{\shortparallel}{\beta}}{1} \cdot |||u||| \cdot |||v||| .$$

. On peut alors revenir à la norme "initiale" $\|\cdot\|$. Ensuite, en choisissant $v = u$ dans (FV), on obtient :

$\underline{\alpha \|u\|^2} \le a(u,u) = \ell(u) \le \underline{\gamma \|u\|}$, d'où

$\alpha \|u\| \le \gamma \underset{\text{e.g.}}{=} \|\ell\|_{V'}$. Par ailleurs, d'après (i),

$\forall v \in V, \; |\ell(v)| = |a(u,v)| \le \beta \|u\| \cdot \|v\|$, donc $\|\ell\|_{V'} \le \beta \|u\|$, d'où l'inégalité (*).

. En modifiant la démonstration (avec un argument de point fixe d'une application contractante), les résultats ci-dessus (FV) (: Formulation variationnelle) et (*) restent valables même si a n'est pas symétrique. Par contre le résultat qui suit $\boxed{\text{PV}}$ (: Problème variationnel) n'est valable que si a est symétrique. Dans ce cas, soit u l'unique solution de (*). Alors

$$\forall v \in V, \; J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - \ell(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - a(u,v) + \frac{1}{2} a(u,u) - \frac{1}{2} a(u,u)$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{a(v-u, v-u)}_{\ge 0} - \underbrace{\frac{1}{2} a(u,u)}_{\text{constante}} .$$

Donc,

$\forall v \in V, \; J(v) \ge -\frac{1}{2} a(u,u) = \frac{1}{2} a(u,u) - \ell(u) = J(u)$,

et $J(v) = J(u)$ ssi $v = u$, d'où le résultat. □

Définition : Soit $J : V \to \mathbb{R}$. On dit que J admet une dérivée - Gâteaux au point u si
(i) $\forall v \in V$, J admet une dérivée au point u, dans la direction v, i.e
$$J'(u,v) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(J(u+hv) - J(u)\right) \text{ existe}$$
et
(ii) $\{v \mapsto J'(u,v)\}$ est une forme linéaire continue sur V, notée $J'(u)$. On a donc, $\forall v \in V$
$$\langle J'(u), v\rangle_{V' \times V} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(J(u+hv) - J(u)\right) \quad (**)$$

. Rem. $\triangle$ contrairement à la dérivée Fréchet (l'application linéaire tangente, cf licence), on ne demande pas ici que dans $(**)$ la convergence soit uniforme / à la direction de v.

. Rem. Pour $J(v) := \frac{1}{2} a(v,v) - \ell(v)$, on vérifie (exo) que J est Gâteaux - différentiable $\forall u \in V$, que $J'(u) = a(u,v) - \ell(v)$, que de plus J est convexe, strictement : $\begin{cases} \forall v, w \in V, v \neq w, \forall \lambda \in]0,1[, \\ J(\lambda v + (1-\lambda) w) < \lambda J(v) + (1-\lambda) J(w). \end{cases}$
L'équivalence entre (PV) et (FV) exprime donc qu'une fonction convexe différentiable admet un minimum global en u ssi sa dérivée $J'(u) = 0$. La stricte convexité garantit (exo) l'unicité de la solution u de (PV). Enfin, on peut démontrer directement l'unicité de la solution u de (FV) : si u_1 et u_2 sont deux solutions de (FV), on a : $\forall v \in V$, $a(u_1, v) = \ell(v)$, $a(u_2, v) = \ell(v)$. Choisissons $v = u_1 - u_2$ et retranchons : $a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$, d'où $u_1 = u_2$ grâce à (ii). $\square$

Méthode directe en calcul des variations : ***

· Thm. 5 : (i) Soit $J : C \subset V \to \mathbb{R}$, V Hilbert (séparable), J continue, J convexe, coercive dans C : $\left\{ \begin{array}{l} J(v) \to +\infty \\ \|v\| \to +\infty \\ v \in C \end{array} \right\}$, C convexe fermé.
(si C non borné)

Alors $\exists\, u \in V$ tq $J(u) = \underset{v \in C}{\mathrm{Inf}}\, J(v)$ $\quad (\mathcal{P})$

(ii) Si de plus J est Gâteaux-différentiable, alors J est caractérisé par l'I.V. :

Trouver $u \in C$ tq $\forall v \in C$, $(J'(u), v-u) \geq 0$ $(\mathcal{P}')$

(iii) Si J est strictement convexe, la solution de $(\mathcal{P})$ est unique.

(iv) Si $C = V$, alors $(\mathcal{P}')$ se réduit à

Trouver $u \in C$ tel que $J'(u) = 0$.

(v) De même, si $C = W_t$ = sous-espace affine (fermé) // à un s.e.v. W fermé dans V, alors $(\mathcal{P}')$ devient

Trouver $u \in W_t$ tel que $J'(u) \in W^{\perp}$.

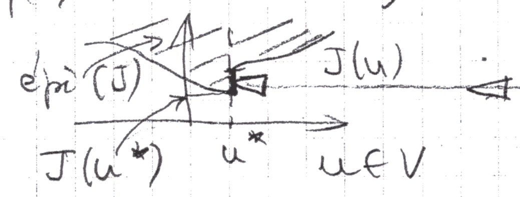
Dém (i) La démonstration utilise la notion de convergence faible dans V. On rappelle – cf TD – que e.g. une suite $u_n \underset{(n \to +\infty)}{\rightharpoonup} u$ ssi $\forall v \in V$, $(u_n, v) \underset{(n \to +\infty)}{\longrightarrow} (u, v)$. On admettra :

Thm 6 : (i) Soit C convexe $\subset V$, V Hilbert. Alors C est fermé (pour la topologie) faible ssi il est fermé fort

(ii) Soit $J : V \to \mathbb{R}$. On dit que J est s.c.i (pour la topologie) faible si $\forall u \in V$, pour toute $u_n \rightharpoonup u$, on a :
$\underline{\lim}_{n \to +\infty} J(u_n) := \lim_{n \to +\infty} \left(\inf_{p \geq n} J(u_p) \right) \geq J(u)$.

Alors J est s.c.i faible ssi elle est s.c.i fort

Dém. admise. Le (i) est une conséquence de Hahn-Banach, et le (ii) s'y ramène, car (exo) J est s.c.i (fort ou faible) ssi son épigraphe
épi$(J) := \{(u, \lambda) \in V \times \mathbb{R} ;\ J(u) \le \lambda\}$ est fermé (fort ou faible : $\square$



Thm 7 :

(i) Soit V un Hilbert, ou plus généralement un espace de Banach réflexif (i.e. $V \equiv V'' := (V')'$). Alors la boule-unité fermée de E est compacte (pour la topologie) faible de V

(ii) Si de plus V est séparable (: il existe une suite (u_n) dense dans V), alors la boule-unité fermée de V est métrisable pour la topologie faible de V donc elle est aussi séquentiellement faiblement compacte :

> De toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans V, Hilbert séparable, on peut extraire une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ faiblement CV dans V.

Dém. admise, cf Brezis. $\square$

. On peut maintenant démontrer le Thm 5.

. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante :

$\forall n,\ u_n \in C$, et $J(u_n) \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} \alpha := \operatorname{Inf} J(v) \geq -\infty$.

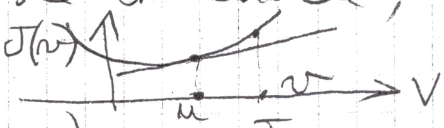
Alors la suite (u_n) est bornée dans $C \subset V$, soit parce que C est borné, soit grâce à la coercivité de J sur C (sinon, $\exists\, (u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tq $\|u_{n_k}\| \to +\infty$, donc $J(u_{n_k}) \to +\infty$).

. Ensuite, V étant un Hilbert séparable, la suite (u_n) est séquentiellement faiblement compacte : $\exists$ une suite extraite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tq $u_{n_k} \underset{(k\to+\infty)}{\rightharpoonup} u$, $u \in V$.

. Comme C est fermé (fort) et convexe, il est aussi faiblement fermé. Donc $u \in C$. De même, J est convexe, et continue (fort), donc s.c.i fort, donc s.c.i faible. Donc $\underset{k\to+\infty}{\underline{\lim}}\, J(u_{n_k}) \geq J(u)$.

. mais toute la suite $(J(u_n))$ CV vers $\alpha := \underset{v\in C}{\mathrm{Inf}}\, J(v)$.
Donc $J(u) \leq \alpha$, avec $u \in C$. Donc
$J(u) = \alpha$.

(ii) Si J est Gâteaux-différentiable et convexe, alors comme au Ch. 3, on a :



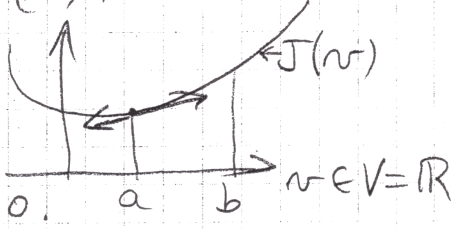
$\forall v \in C$, $J(v) \geq J(u) + (J'(u), v-u)$, car J convexe donc $(\mathcal{P}') \Rightarrow (\mathcal{P})$. Réciproquement, si u vérifie $(\mathcal{P})$, alors $\forall v \in C$, $\forall t \in]0,1]$, $u + t(v-u) \in C$, donc

$$\underbrace{\frac{1}{t}\big(J(u+t(v-u)) - J(u)\big)}_{\geq 0} \underset{(t\to 0_+)}{\longrightarrow} \underbrace{(J'(u), v-u)}_{\geq 0}. \quad \square$$

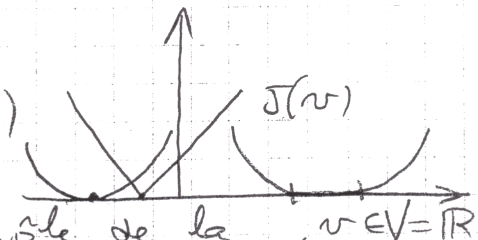
(iii), (iv) et (v) se démontrent comme au Ch. 3. $\square$

Illustrations :

(1) $C = [a,b]$
$u = a$, $J'(u) \geq 0$.

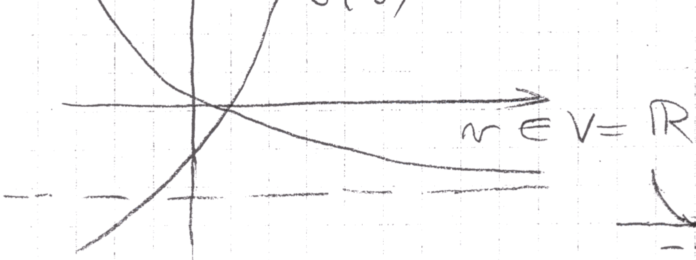


(2)

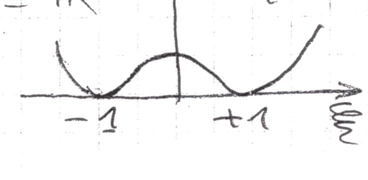


Rôle de la stricte convexité
(cond. suffisante pour l'unicité)

(3) Rôle de la coercivité :



(4) Rôle de la convexité :
$$\mathrm{Inf}\left\{\int_a^b \left[W(u'(x)) + \frac{1}{2}(u(x))^2\right]dx \; ; \; u(a) = u(b) = 0\right\}$$



$\square$