Analyse fonctionnelle pour la Licence

F. Poupaud

INTRODUCTION

Cet ouvrage correspond à un cours donné à l´Université de Nice pendant le second semestre de la Licence. Il s´adresse aux étudiants qui veulent poursuivre leur cursus par une maîtrise de mathématiques ou de mathématiques appliquées.

Les livres dont il est largement inspiré sont

H. Brezis. - ANALYSE FONCTIONNELLE : THÉORIE ET APPLICATIONS. - Paris : Masson, 1983. - (Mathematiques Appliquées pour la Maitrise.)

J. A. Dieudonné. - ELÉMENTS D'ANALYSE. Tome I. Fondements de l'analyse moderne. - 3ème édition. - Paris - Gauthier-Villars, 1979.

L. Schwartz. - ANALYSE HILBERTIENNE. - Paris : Hermann, 1979. - (Collection méthodes.)

Le premier chapitre est consacré aux espaces métriques et aux rappels de topologie (que les étudiants ont vue au premier semestre de la Licence).

Le second chapitre traite du cas des espaces vectoriels normés dans le cas de la dimension infinie : Théorème de Riesz sur la non compacité de la boule unité, hyperplan et forme linéaire, applications linéaires continues, existence d´application linéaire non continue, etc...

Le troisième chapitre donne les premières propriétés des espaces de Banach : séries normalement convergente, équations différentielles et intégrales pour des fonctions de la variable réelle à valeur dans un Banach.

Le quatrième chapitre étudie en détails les espaces de fonctions continues. Deux Théorèmes importants y sont donnés : théorème de Stone Weierstrass sur la densité des polynômes et théorème d´Ascoli sur la compacité des ensembles de fonctions équicontinus.

Le cinquième chapitre expose la théorie élémentaire des espaces de Hilbert : orthogonalité, projection sur les convexes, théorèmes de représentation : Riesz, Lax-Milgram, adjoint des opérateurs.

Le sixième et dernier chapitre est consacrée aux rudiments de la théorie spectrale : ensemble résolvant, spectre et valeurs propres. Les démonstrations étant plus simples la théorie de Riesz Fredholm est présentée dans un cadre hilbertien plutot que dans les Banach. On décrit le spectre des opérateurs compacts ainsi que la diagonalisation des opérateurs hermitiens compacts.

Table des matières

Chapitre 1

Espaces métriques

Le but de ce chapitre est de rappeler les bases du cours de topologie qui sont utiles pour l´étude des espaces fonctionnels. Le parti pris est de ne faire ces rappels topologiques que dans un cadre métrique. On introduit donc tout d´abord les boules ce qui permet de définir les ouverts et donc la topologie associé. On s´intéresse ensuite à la convergence des suites puis à la continuité des applications entre espaces métriques. Une des notions clé est la notion d´espace complet, ce qui permet d´énoncer un des théorèmes fondamentaux (même s´il est élémentaire) de prolongement des applications uniformémemt continues. Une autre notion clé est celle de compacité et l´on fera le lien entre compacité et compacité séquentielle entre relative compacité et précompacité.

1.1 Topologie des espace métriques

Un espace métrique est la donnée d´un ensemble dont les éléments sont considérés comme des points et d´une application qui permet de mesurer si deux points sont proches ou éloignés. Plus précisément on a

Définition 1. *Un espace métrique (E, d) est la donnée d´un ensemble E et d´une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$, appelée distance qui vérifie*

$$\forall x,\ y\ z\ \in E, \bullet \quad d(x,y) = 0,\ \textit{ssi}\ x = y,$$
$$\bullet \quad d(x,y) = d(y,x),$$
$$\bullet \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

L´inégalité ci-dessus est appelée inégalité triangulaire. Elle dit que la *longueur* du "coté" (x, z) du "triangle" (x, y, z) est inférieure à la *longueur* des deux autre cotés. De même que l´on a des "triangles" on a aussi des boules $B(x; r)$ de centre x de rayon r.

$$B_f(x;r) = \{y \in E \ / \ d(x,y) \leq r\}. \tag{1.1}$$

Ces boules sont dites fermées, par opposition aux boules ouvertes données par

$$B(x;r) = \{y \in E \ / \ d(x,y) < r\}. \tag{1.2}$$

Il n´y a pas de notations universellement admises pour faire la différence entre boules ouvertes et boules fermées. En dehors d´un contexte clair il faut donc toujours mieux préciser si la notation $B(x; r)$ désigne la boule ouverte ou la boule fermée.

L´inégalité triangulaire permet de résoudre l´exercice suivant.

Exercice 1.
Soit $0 \leq \rho < r$ *et* $x,\ y$ *deux points de* E*, montrer que* $B_f(x;\rho) \subset B(x,r) \subset B_f(x;r)$ *et que si* $d(x,y) < r-\rho$ *alors* $B_f(y;\rho) \subset B(x,r)$*.*

La signification du vocabulaire : ouvert, fermé, va devenir claire après la proposition suivante.

Proposition 1.
Soit (E,d) *un espace métrique. On note* $\mathcal{O}$ *l´ensemble des parties* $O \subset E$ *qui vérifient*

$$\forall x \in O, \quad \text{il existe } r > 0,\ B(x;r) \subset O. \tag{1.3}$$

Alors $\mathcal{O}$ *définit une topologie sur* E*, c´est à dire un ensemble d´ouverts qui satisfont aux propriétés suivantes*

$$\emptyset,\ E\ \in \mathcal{O}$$
$$\text{Soit } \mathcal{S} \text{ un sous ensemble de } \mathcal{O} \text{ alors } \Omega = \cup_{O \in \mathcal{S}}\ O\ \in \mathcal{O},$$
$$\text{Si } O_1,\ ...O_n,\ n \in \mathbb{N} \text{ est une famille finie de } \mathcal{O} \text{ alors } O_1 \cap O_2 .... \cap O_n \in \mathcal{O}.$$

La vérification est immédiate. Si $x \in \Omega$ alors il existe un $O \in \mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ tel que $x \in O$. Donc par définition de $\mathcal{O}$, il existe $r > 0$ tel que $B(x;r) \subset O \subset \Omega$ et par conséquent $\Omega \in \mathcal{O}$. De même si $x \in O_1,\ ...O_n$ alors il existe $r_1, ...r_n > 0$ tels que $B(x;r_1) \subset O_1,\ ...B(x;r_n) \subset O_n$. On choisit alors $r = \min\{r_1, ...r_n\}$ on a bien que $r > 0$ et pour tout $k = 1, ..., n$ $B(x;r) \subset B(x;r_k) \subset O_k$. Il s´en suit que $B(x;r_k) \subset O_1 \cap O_2 .... \cap O_n$ et que ce dernier ensemble est bien dans $\mathcal{O}$.

On dit que les ouverts sont stables par réunion quelconque et par intersection finie. Attention une intersection infinie d´ouverts n´est pas nécessairement un ouvert comme le montre l´exemple élémentaire suivant. On prend $E = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$. Alors $O_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[,\ n = 1, 2, ...$ sont bien des ouverts mais $\cap_{n=1}^{\infty} O_n = \{0\}$ n´en est pas un !

Un sous ensemble F de E est dit fermé s´il est complémentaire d´un ouvert, c´est à dire $E \setminus F \in \mathcal{O}$. On vérifie alors par passage au complémentaires que les fermés sont stables par intersections quelconques et réunions finies. On note $\mathcal{F}$ l´ensemble des parties fermés de E. On a aussi

Exercice 2. *Les boules ouvertes sont des ouverts, les boules fermés sont des fermés.*

Les parties qui sont à la fois ouvertes et fermées sont reliées à la notion de connexité. On renvoie pour cette notion au cours de topologie. On rappelle uniquement que par définition E est dit connexe si les seules parties ouvertes et fermées de E sont $\emptyset$ et E.

Les notions suivantes de topologie vont par contre être utilisées dans la suite.

Soit X un sous ensemble d´un espace métrique (E,d). Son intérieur $\overset{\circ}{X}$ est par définition le plus grand ouvert contenu dans X. Sa fermeture (ou adhérence) $\overline{X}$ est le plus petit fermé qui le contient.

$$\overset{\circ}{X} = \cup_{O \in \mathcal{O},\ O \subset X} O, \qquad \overline{X} = \cap_{F \in \mathcal{F},\ X \subset F} F.$$

La frontière de X est $\partial X = \overline{X} \setminus \overset{\circ}{X}$. On dit que X est une partie dense de E si et seulement si $\overline{X} = E$.

On rappelle aussi qu´un voisinage d´un point $x \in E$ (ou d´une partie $X \subset E$) est un sous ensemble de E qui contient un ouvert contenant x (respectivement X).

Exercice 3. *Montrer qu´un ensemble est un ouvert si et seulement si il est voisinage de tous ses points.*

Il faut faire attention aux fausses intuitions dans un cadre aussi général que les espaces métriques. Par exemple, il est faux que nécessairement l´intérieur d´une boule fermée soit la boule ouverte de même rayon et de même centre. L´exemple suivant en est une démonstration. Ce sera par contre vrai dans le cadre des espaces vectoriels normés.

Exercice 4. *Soit (E, d) un espace métrique, $x \in E$ et $r > 0$. Trouver les relations d´inclusion et d´égalité entre les ensembles*

$$\overset{\circ}{B}(x;r),\ B(x;r),\ \overline{B(x;r)},\ \overset{\circ}{B}_f(x;r),\ B(x;r),\ \overline{B_f(x;r)}.$$

Soit $E = \{-2\} \cup [-1, 2]$ muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$. Montrer que

$$B_f(1;1) = [0, 2], \quad B(1;1) =]0, 2[, \quad \overset{\circ}{B}_f(1;1) =]0, 2].$$

Déterminer de même $B_f(-1;1),\ B(-1;1),\ \overline{B(-1;1)}$. Commenter ces résultats.

On peut aussi définir une distance entre sous ensembles de E.

Définition 2. *Soit (E, d) un espace métrique et A, B deux sous ensembles non vides de E. La distance de A à B est par définition :*

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) \ / \ a \in A,\ b \in B\}.$$

Si $x \in E$ on pose $d(x, A) = d(\{x\}, A)$.

Pour terminer cette section on introduit une métrique sur les espaces produits. Celà est nécessaire par exemple pour étudier des fonctions f de plusieurs variables $f \equiv f(x, y)$ où x est dans un espace métrique et y dans un autre.

Proposition 2. *Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques. Alors on peut munir l´espace produit $E \times F$ d´une métrique en posant*

$$\forall (x, y),\ (x', y') \in E \times F, \quad d((x, y), (x', y')) = d_E(x, x') + d_F(y, y').$$

La démonstration est laissée en exercice.

1.2 Limites et continuité

On va commencer par décrire pour des espaces métriques des propriétés des suites et des fonctions qui sont purement topologiques, tout en faisant de manière systématique le lien avec la métrique. On rappelle ce qu´est une suite convergente.

Définition 3. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d´un espace métrique (E, d). On dit que la suite converge vers $a \in E$ et on note alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ si et seulement si pour tout voisinage V de a il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $a_n \in V$.*

On remarque que la définition ne fait pas intervenir la distance. On dit pour cette raison que c'est une notion purement topologique. Cependant il est souvent plus efficace d´utiliser la caractérisation suivante d´une suite convergente.

Proposition 3. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d´un espace métrique (E, d) et $a \in E$. On a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$ dans $\mathbb{R}$.*

Cette caractérisation a l´immense avantage suivant : au lieu de vérifier un critère abstrait, on vérifie simplement qu´une suite numérique tend vers 0.

On commence par montrer que si la suite est convergente la distance tend vers 0. Pour tout $\varepsilon > 0$ il suffit de prendre $V = B(a, \varepsilon)$ pour obtenir l´existence d´un N tel que $\forall n \geq N$, on a $a_n \in B(a, \varepsilon)$ et donc $d(a, a_n) < \varepsilon$. On a donc $d(a, a_n) \to 0$.

Réciproquement, supposons que $d(a, a_n) \to 0$. Soit V un voisinage de a. V contient un ouvert O contenant a. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a; \varepsilon) \subset O \subset V$. Par définition de la convergence de $d(a, a_n)$, il existe un N tel que $\forall n \geq N$, on a $d(a, a_n) < \varepsilon$. Donc $a_n \in B(a; \varepsilon) \subset V$.

Définition 4. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d´un espace métrique (E, d), on dit que $x \in E$ est un point d´adhérence de la suite si et seulement si il existe une suite extraite $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x.*

Exercice 5. *Montrer que x n´est pas un point d´adhérence d´une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x; \varepsilon)$ ne contient qu´un nombre fini de termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 6. *Soit X une partie dense d´un espace métrique (E, d). Montrer que pour tout $x \in E$ il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.*

Le lien entre suites convergentes et parties fermées est fait dans la proposition suivante.

Proposition 4. *Soit F une partie d´un espace métrique (E, d). F est fermé dans E si et seulement si toute suite de F qui converge dans E a sa limite qui appartient à F.*

Supposons en effet que F soit fermé et soit $a \notin F$ un point quelconque. Alors comme $E \setminus F$ est un ouvert il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a; \varepsilon) \cap F = \emptyset$. Donc tout élément x de F vérifie $d(x, a) \geq \varepsilon$. Une suite de F ne peut donc pas converger vers a.

Si maintenant F n´est pas un fermé, comme $E \setminus F$ n´est pas un ouvert il existe un point $a \notin F$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $B(a; \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$. Pour $\varepsilon = 1/n$ il existe donc $x_n \in F$ tel que $x_n \in B(a; 1/n)$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F converge vers $a \notin F$. Cela conclut la démonstration de la proposition.

Exercice 7. *Soit F un fermé d´un espace métrique (E, d) et $x \in E$. On a $x \in F$ si et seulement si $d(x, F) = 0$.*

On s´intéresse maintenant à la continuité des applications. On utilisera indifféremment le terme de fonction ou d´application. On rappelle les définitions d´image et d´image réciproque. Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application de E dans F. Si $X \subset E$ et $Y \subset F$ alors

$$f(X) = \{y = f(x) \in F \ / \ x \in X\}, \qquad f^{-1}(Y) = \{x \in E \ / \ f(x) \in Y\}. \tag{1.4}$$

Ces notations sont standard même si elles sont légèrement abusives. En effet il convient de faire la distinction entre l´application de E dans F et l´application “image” des parties de E dans les parties de F. De même f n´est pas nécessairement bijective et n´a donc pas en général d´application réciproque f^{-1}. Par contre on peut toujours définir l´image réciproque d´un ensemble. La distinction se fait suivant que l´argument est un élément ou un ensemble. Ainsi si $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ peut n´avoir aucun sens alors que $f^{-1}(\{y\})$ en a toujours et désigne un sous ensemble de X.

La proposition suivante caractérise les fonctions continues.

Proposition 5. *Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, $x \in E$ un point de E et $f : E \to F$ une application de E dans F. On dit que f est continue au point x si et seulement si une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée.*
(i) Pour tout voisinage $W \subset F$ de $f(x)$ il existe un voisinage $V \subset E$ de x tel que $f(V) \subset W$.

(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E qui converge vers x la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de F converge vers $f(x)$.
(iii) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si pour $x,\ y \in E$ on a $d_E(x,y) \leq \eta$ alors $d_F(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$.

On peut tout d´abord remarquer que si $f(V) \subset W$ alors $V \subset f^{-1}(W)$ et donc $f^{-1}(W)$ sera un voisinage de x si V est un voisinage de x. (i) peut donc s´énoncer comme suit.

(i-bis) L´image réciproque de tout voisinage de $f(x)$ est un voisinage de x.

On démontre maintenant la proposition.
Le fait que (i) implique (ii) est immédiat. En effet si W est un voisinage quelconque de $f(x)$ alors il existe V voisinage de x tel que $f(V) \subset W$. Si $x_n \to x$ alors à partir d´un certain rang N, on a $x_n \in V$. Par conséquent à partir de ce même rang $f(x_n) \in W$. Cela veut bien dire que $f(x_n) \to f(x)$.
Pour la réciproque on passe par la contrapposée. Supposons donc que (i) n´ait pas lieu. Il existe donc un voisinage W de $f(x)$ tel que pour tout voisinage V de x et en particulier pour $V = B(x; 1/n)$, $f(V)$ n´est pas inclus dans W. Il existe donc un $x_n \in B(x; 1/n)$ tel que $f(x_n) \notin W$. On a bien $x_n \to x$ et $f(x_n)$ ne tend pas vers W.
On obtient aussi très facilement que (iii) implique (i). En effet si W est un voisinage de $f(x)$ donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(x); \varepsilon) \subset W$. Le voisinage $V = B(x; \eta)$ convient alors.
Réciproquement soit $\varepsilon > 0$, $W = B(f(x); \varepsilon)$ est un voisinage de $f(x)$. Si (i) est vérifié il existe donc un voisinage V de x tel que $f(V) \subset B(f(x); \varepsilon)$. Or il existe $\eta > 0$ tel que $B(x; \eta) \subset V$. On a ainsi $f(B(x; \eta)) \subset B(f(x); \varepsilon)$, ce qui est exactement (iii).

Une application de E dans F est dite continue si elle est continue en tout point $x \in E$. On note $C(E; F)$ l´ensemble des applications continues de E dans F. On a la proposition suivante.

Proposition 6. *Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application de E dans F. $f \in C(E; F)$ si et seulement si l´image réciproque de tout ouvert est un ouvert ou encore si et seulement si l´image réciproque de tout fermé est un fermé.*

Supposons que $f \in C(E; F)$. Soit ω un ouvert de F et $x \in f^{-1}(\omega)$. Comme ω est un voisinage de $f(x)$ par $(i - bis)$ on obtient que $f^{-1}(\omega)$ est un voisinage de x. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x; \varepsilon) \subset f^{-1}(\omega)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in f^{-1}(\omega)$ on obtient que $f^{-1}(\omega)$ est un ouvert.
Réciproquement si l´image réciproque de tout ouvert est un ouvert on laisse au lecteur le soin de vérifier que $(i - bis)$ est satisfait.
La caractérisation des fermés se fait par passage aux complémentaires. En effet on a $f^{-1}(F \setminus O) = E \setminus f^{-1}(O)$.

On a la proposition classique suivante sur la composition des fonctions continues (la démonstration est laissée en exercice).

Proposition 7. *Soient E, F, G trois espaces métriques et $f : E \to F$, $g : F \to G$. Soit $x \in E$, si f est continue en x et g continue en $f(x)$ alors $g \circ f$ est continue en x. Si $f \in C(E; F)$ et $g \in C(F; G)$ alors $g \circ f \in C(E; G)$.*

On introduit la convergence uniforme des fonctions.

Définition 5. *Soit E, F, deux espaces métriques. Si $(f_n)_{n\in nit}$ est une suite de fonctions de E dans F on dit qu´elle converge uniformément vers une fonction $f : E \to F$ si et seulement si :*

$$\sup_{x\in E} d_F(f_n(x), f(x)) \to 0, \qquad \textit{quand } n \to \infty.$$

Proposition 8. *Soient* (E, d_E) *et* (F, d_F) *deux espaces métriques et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* E *dans* F *qui converge uniformément vers une fonction* $f : E \to F$. *Alors si pour tout* n, *les fonctions* f_n *sont continues en un point* $x \in E$, *il en est de même pour la limite* f.

On peut évidemment remplacer le “pour tout n” par “pour tout n à partir d´un certain rang”. Cette proposition peut aussi s´énoncer :

Toute limite uniforme de fonctions continues est une fonction continue.

La démonstration est facile en utilisant le critère (iii) de la proposition 6. Soit en effet $\varepsilon > 0$ il existe un indice n pour lequel $\forall y \in E,\ d_F(f_n(y), f(y)) < \varepsilon/3$. Pour cet indice n fixé, la continuité donne l´existence de $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in E$ avec $d_E(x, y) < \eta$ on ait $d_F(f_n(y), f_n(x)) < \varepsilon/3$. Il ne reste plus qu´à utiliser l´inégalité triangulaire. Pour tout $y \in E$ tel que $d_E(x, y) < \eta$ on a

$$\begin{aligned} d_F(f(y), f(x)) &\leq d_F(f_n(y), f(y)) + d_F(f_n(y), f_n(x)) + d_F(f_n(x), f(x)) \\ &\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

On termine cette section en rappelant la définition de la continuité uniforme.

Définition 6. *Soit* f *une application continue entre deux espaces métriques* (E, d_E) *et* (F, d_F). *On dit que* f *est uniformément continue si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\eta > 0$ *tel que pour tout couple* x *et* y *dans* E *vérifiant* $d_E(x, y) \leq \eta$ *on a* $d_F(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$.

Ce qu´il est essentiel de comprendre dans cette définition est la différence avec la continuité au point x (ou au point y !). Le réel η ne dépend pas du point où on utilise la continuité : c´est le même pour tous.

Exercice 8. *Soit* (E, d) *un espace métrique. On munit* $E \times E$ *de la distance introduite à la proposition 2 et* $\mathbb{R}^+$ *de la distance habituelle, valeur absolue de la différence. Montrer que la distance* $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ *est une fonction uniformément continue.*

Exercice 9. *Soit* $E = \mathbb{R}$ *muni de la distance* $d(x, y) = |x - y|$, *montrer que la fonction définie par* $f(x) = x^2$ *n´est pas uniformément continue. Montrer que* $d'(x, y) = |arctg(x) - arctg(y)|$ *est aussi une distance sur* $\mathbb{R}$. *Est ce que* f *est uniformément continue pour cette nouvelle distance ?*

1.3 Espaces métriques complets

La notion d´espace complet est essentielle pour la construction de solutions à des problème d´analyse. La philosophie générale est de construire des solutions approchées et de démontrer qu´une suite de ces solutions approchées converge vers la solution exacte que l´on cherche sans qu´il soit utile d´expliciter cette limite. Il faut donc des critères permettant de démontrer qu´une suite converge sans connaitre la limite. Deux exemples vus au premier cycle sont les suites numériques croissantes majorées et les suites de Cauchy.

Définition 7. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d´un espace métrique* (E, d). *On dit qu´elle est de Cauchy si elle vérifie*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \textit{il existe } N \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \forall n \geq N,\ \forall m \geq N, \quad d(a_n, a_m) \leq \varepsilon.$$

Exercice 10. *Montrer qu´une suite convergente est de Cauchy.*
On suppose qu´une suite extraite d´une suite de Cauchy converge. Montrer alors que toute la suite converge.
On pose maintenant $E = [0, \infty[$ *et* $d(x, y) = |arctg(x) - arctg(y)|$. *Montrer que c´est bien un espace métrique. Montrer que la suite* $a_n = n^2$ *est de Cauchy. Converge-elle dans* E *?*

L´exercice précédent illustre bien que les suites de Cauchy ne sont pas nécessairement convergentes. Ce ne sera le cas que pour de “bons” espaces.

Définition 8. *Un espace métrique (E, d) est complet si et seulement si toutes les suites de Cauchy convergent.*

L´exemple typique est $\mathbb{R}$ pour la distance $d(x, y) = |x - y|$. Plus généralement les parties fermées de $\mathbb{R}$ pour cette distance sont des complets. Par contre $]0, 1]$ n´est pas complet (il manque le point 0), $\mathbb{Q}$ n´est pas complet (il manque les irrationnels). On peut dans certain cas déduire la complétude d´un ensemble par le fait qu´il est fermé dans un espace qui le contient.

Proposition 9. *Soit (E, d) un espace métrique complet et $F \subset E$. Alors (F, d) est complet si et seulement si F est fermé dans E.*

La démonstration utilise la proposition 4. En effet F est fermé dans E si et seulement si les suites de F convergente dans E ont leur limites dans F. Mais si E est complet les suites convergentes sont les suites de Cauchy. Donc F sera fermé si et seulement si les suites de Cauchy ont une limite dans F, c´est à dire si et seulement si F est complet.

Le théorème suivant est très utile dans de nombreux domaines de l´analyse.

Théorème 1. *Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques. Soit D un sous ensemble dense de E et $f : D \to F$. Si*
- *F est complet,*
- *f est uniformément continue sur D,*

alors il existe un unique prolongement continu $\tilde{f}$ de f à E tout entier et ce prolongement est uniformément continu.

Soit $x \in E \setminus D$, il existe alors (cf Exercice 6) une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D tel que $x_n \to x$.

Montrons alors que $f(x_n)$ est une suite de Cauchy de F. Soit $\varepsilon > 0$, comme f est uniformément continue il existe $\eta > 0$ tel que si $d_E(y, z) \leq \eta$ avec $y,\ z\ \in D$ on a $d_F(f(y), f(z)) \leq \varepsilon$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy (cf Exercice 10) il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$ et $m \geq N$ alors $d_E(x_n, x_m) \leq \eta$. Par conséquent pour $n \geq N$ et $m \geq N$ on a $d_F(f(x_n), f(x_m)) \leq \varepsilon$.

Comme c´est une suite de Cauchy elle converge vers une limite $l \in F$. Cette limite ne dépend pas du choix de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet si $y_n \to x$ est une autre suite alors $d_E(x_n, y_n) \leq d_E(x_n, x) + d_E(x, y_n) \to 0$ donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N'$ on a $d_E(x_n, y_n) \leq \eta$ et donc $d_F(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon$. Par conséquent $d_F(f(x_n), f(y_n)) \to 0$ et comme $d_F(f(x_n), l) \to 0$ on a bien $f(y_n) \to l$.

La limite l ne dépend que du point x. Si $\tilde{f}$ est un prolongement continu de f on a donc nécessairement $\tilde{f}(x) = l$. Cela montre l´unicité du prolongement. Il reste à prouver que si on définit $\tilde{f}$ de cette façon c´est une fonction qui est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$, comme f est uniformément continue il existe $\eta > 0$ tel que si $d_E(t, z) \leq \eta$ avec $t,\ z\ \ \in D$ on a $d_F(f(t), f(z)) \leq \varepsilon$. Soit $x,\ y$ deux points quelconques de E tels que $d_E(x, y) \leq \eta/2$. On sait qu´il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de D telles que $x_n \to x$ et $y_n \to y$. Pour n suffisement grand on aura $d_E(x_n, y_n) \leq d_E(x_n, x) + d_E(x, y) + d_E(y, y_n) \leq \eta/4 + \eta/2 + \eta/4 = \eta$ et donc $d_F(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon$. Mais $f(x_n) \to \tilde{f}(x)$, $f(y_n) \to \tilde{f}(y)$ et la distance est continue (cf Exercice 9). Donc $d_F(f(x_n), f(y_n)) \to d_F(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leq \varepsilon$. C´est ce qu´il fallait démontrer.

Un autre théorème clé de l´analyse pour obtenir l´existence et l´unicité de solution de problèmes non linéaire est le suivant. La notion d´espace complet est là aussi essentielle.

Théorème 2. *(Théorème de Picard) Soient (E, d) un espace métrique complet. Soit $f : E \to E$ une application strictement contractante, c´est à dire qu´il existe une constante $k \in]0, 1[$ telle que :*

$$\forall x,\ y \in E, \qquad d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y).$$

Alors f a un unique point fixe, c´est à dire qu´il existe un unique $a \in E$ tel que $a = f(a)$. De plus toute suite récurrente, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = f(a_n)$, converge vers a et $d(a_n, a) \leq k^n\, d(a_0, a)$.

Il faut remarquer que ce théorème donne un moyen constructif d´approcher la solution de point fixe a et même un ordre de convergence.

On remarque tout d´abord que la fonction f est continue. Considérons une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = f(a_n)$. On a alors

$$\forall n \geq 1,\ d(a_{n+1}, a_n) = d(f(a_n), f(a_{n-1})) \leq k\ d(a_n, a_{n-1}).$$

Par récurrence on obtient $\forall n \geq 1,\ d(a_{n+1}, a_n) \leq k^n\ d(a_1, a_0)$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\forall n,\ p \geq 1,\ d(a_{n+p}, a_n) &\leq d(a_{n+p}, a_{n+p-1}) + d(a_{n+p-1}, a_{n+p-2})... + d(a_{n+1}, a_n)\\ &\leq k^{n+p}\ d(a_1, a_0) + k^{n+p-1}\ d(a_1, a_0)... + k^n\ d(a_1, a_0)\\ &\leq \frac{k^n}{1-k}\ d(a_1, a_0).\end{aligned}$$

Cela montre que la suite est de Cauchy et donc, comme E est complet, $a_n \to a$ pour une limite $a \in E$. On a aussi $f(a_n) = a_{n+1} \to a$. Comme f est continue $f(a_n) \to f(a)$. On obtient ainsi que $a = f(a)$. Maintenant si b est un autre point fixe, $b = f(b)$, alors $d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq k\ d(a, b)$, $(1 - k)d(a, b) \leq 0$. Comme $1 - k > 0$ cela implique que $d(a, b) \leq 0$ et donc $d(a, b) = 0$, $a = b$. Le point fixe est bien unique. Reste à obtenir l´ordre de convergence de la suite a_n. On a $d(a_{n+1}, a) = d(f(a_n), f(a)) \leq k\ d(a_n, a)$, on obtient par récurrence $d(a_{n+1}, a) \leq k^{n+1}\ d(a_0, a)$ ce qu´il fallait démontrer.

Exercice 11. *Soit $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f \geq 0,\ f \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}),\ f$ est borné$\}$, on munit E de la distance $d(f, g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$.*
1. Montrer que (E, d) est complet.
Soit $g \in E$ et $k \in C^0(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ qui vérifie $k \geq 0$ et tel qu´il existe $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable avec

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad k(x, y) \leq \varphi(y), \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\ dt < 1.$$

On cherche $f \in E$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - \int_{\mathbb{R}} k(x, y)f(y)\ dy = g(x).$$

2. Montrer que pour tout $u \in E$, $K(u) : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} k(x, y)u(y)\ dy \in E$.
3. En utilisant un point fixe montrer qu´il existe une unique solution f.

1.4 Compacité

Un autre concept clé de l´analyse est celui de compacité. La compacité permet aussi d´obtenir des suites convergentes. L´exemple standard qu´il faut avoir en tête est celui des intervalles bornés de $\mathbb{R}$. En particulier on a vu au premier cycle que de toute suite numérique bornée on peut extraire une suite qui converge. On a les définitions suivantes.

Définition 9. *Un espace métrique (E, d) est compact si de tout recouvrement de E par des ouverts on peut extraire un recouvrement fini. Autrement dit si $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ est tel que $E = \cup_{O\in\mathcal{S}} O$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et O_1, O_2,...O_n des ouverts de $\mathcal{S}$ tels que $E = O_1 \cup O_2 ... \cup O_n$.*
L´espace est dit séquentiellement compact si de toute suite on peut extraire une suite qui converge dans E.

L´espace est précompact si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x_1,\ x_2, ...x_n$, n points de E tel que $E = B(x_1; \varepsilon) \cup B(x_2; \varepsilon)... \cup B(x_n; \varepsilon)$

Si X est une partie de E alors X est aussi un espace métrique pour la distance induite. Les définitions ci-dessus s´appliquent donc aussi aux sous ensembles de E. Il faut juste faire attention que les convergences doivent avoir lieu dans X (si une limite existe dans E il faut vérifier qu´elle appartient à X) et que les boules de X (respectivement les ouverts de X) sont les intersections des boules de E (respectivement des ouverts de E) avec X ou alors on remplace l´égalité dans les définitions de la compacité et de la précompacité par des inclusions.

Exercice 12. *Soit X une partie d´un espace métrique (E, d). Montrer que si X est précompact alors son adhérence $\overline{X}$ est aussi précompacte.*

Les notions de compacité et de compacité séquentielle sont purement topologiques, par contre la précompacité fait intervenir la distance. En topologie générale (quand il n´y a pas nécessairement de distance mais uniquement une topologie définie par ses ouverts) il n´y a pas de lien entre compacité et compacité séquentielle. Cela vient du fait qu'une valeur d'adhérence d'une suite n'est pas nécessairement une limite d'une suite extraite. Il en est heureusement autrement dans les espaces métriques.

Théorème 3. *Soit (E, d) un espace métrique. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.*
$\bullet$ *(E, d) est compact.*
$\bullet\bullet$ *(E, d) est séquentiellement compact.*
$\bullet\bullet\bullet$ *(E, d) est précompact et complet.*

On commence par remarquer qu´un espace compact est précompact. En effet $E = \cup_{x \in E} B(x; \varepsilon)$, de ce recouvrement par des ouverts on peut extraire un recouvrement fini ce qui donne la précompacité.

On voit aussi facilement qu´un espace séquentiellement compact est complet. En effet de toute suite de Cauchy on peut extraire une suite convergente et l´exercice 10 montre que c´est alors toute la suite qui converge.

Le reste de la démonstration est plus délicat.

Montrons tout d´abord que $\bullet$ implique $\bullet\bullet$ par un raisonnement par l´absurde. Soit donc E un métrique compact et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite sans point d´adhérence. Soit $x \in E$, comme x n´est pas un point d´adhérence, il existe alors $\varepsilon_x > 0$ tel que $B(x; \varepsilon_x)$ ne contient qu´un nombre fini de termes de la suite, cf exercice 5. Par compacité il existe $x_1, ...x_K$ tels que $E \subset B(x_1; \varepsilon_{x_1}) \cup ...B(x_K; \varepsilon_{x_K})$. Or $B(x_1; \varepsilon_{x_1}) \cup ...B(x_K; \varepsilon_{x_K})$ ne contient qu´un nombre fini de terme de la suite on ne peut donc pas avoir $\{a_n /\ n \in \mathbb{N}\} \subset B(x_1; \varepsilon_{x_1}) \cup ...B(x_K; \varepsilon_{x_K})$. D´où la contradiction.

Pour montrer que $\bullet\bullet$ implique $\bullet\bullet\bullet$ démontrons la contrapposée. Si E n´est pas précompact alors il existe $\varepsilon > 0$ tel qu´il n´existe pas de recouvrement fini par des boules de rayon ε. On va alors construire une suite sans point d´adhérence. Soit $a_0 \in E$, comme $B(a_0; \varepsilon)$ ne recouvre pas E il existe $a_1 \in E$ tel que $a_1 \notin B(a_0; \varepsilon)$. Supposons choisis $a_0, ..., a_n$ dans E tels que $a_n \notin B(a_0; \varepsilon) \cup ...B(a_{n-1}; \varepsilon)$ alors comme $B(a_0; \varepsilon) \cup ...B(a_{n-1}; \varepsilon) \cup B(a_n; \varepsilon)$ ne recouvre pas E il existe $a_{n+1} \in E$ tel que $a_{n+1} \notin B(a_0; \varepsilon) \cup ...B(a_{n-1}; \varepsilon) \cup B(a_n; \varepsilon)$. La suite ainsi construite vérifie que pour $n > m$ $a_n \notin B(a_m; \varepsilon)$ et donc $d(a_n, a_m) \geq \varepsilon$. La suite est donc sans point d´adhérence. On vient de prouver que si l´espace est séquentiellement compact alors nécessairement il est précompact et on a déjà vu qu´il était aussi complet.

Il reste à prouver que $\bullet\bullet\bullet$ implique $\bullet$. On raisonne par l´absurde. Si E n´est pas compact il existe un sous ensemble $\mathcal{S}$ des ouverts $\mathcal{O}$ qui recouvre E, $E = \cup_{O \in \mathcal{S}} O$, et tel qu´il n´existe aucun sous recouvrement fini. Comme E est précompact il peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon 1. Une de ces boules, $B(a_0; 1)$ ne peut donc pas être recouvert par un nombre fini d´ouverts de $\mathcal{S}$. On peut aussi recouvrir $B(a_0; 1)$ par des boules en nombre fini de rayon $1/2$ et on peut toujours supposer qu´elles ont une intersection non vide avec $B(a_0; 1)$. Nécessairement au moins une de ces boules $B(a_1; 1/2)$ n´admet pas de recouvrement fini par des ouverts de $\mathcal{S}$. On construit ainsi par récurrence une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $B(a_n; 1/2^n) \cap B(a_{n-1}; 1/2^{n-1}) \neq \emptyset$ et qui ne peut pas être recouvert par un nombre fini d´ouverts de $\mathcal{S}$. On a $d(a_n, a_{n-1}) \leq 1/2^n + 1/2^{n-1} = 3/2^n$ et donc

$$d(a_{n+p}, a_n) \leq d(a_{n+p}, a_{n+p-1}) + d(a_{n+p-1}, a_{n+p-2}) + ...d(a_{n+1}, a_n)$$
$$d(a_{n+p}, a_n) \leq 3/2^{n+p} + 3/2^{n+p-1} + ... + 3/2^{n+1} \leq 3/2^n.$$

La suite est donc de Cauchy et comme E est complet, elle converge vers un élément $a \in E$. En passant à la limite $p \to \infty$ plus haut on obtient aussi que $d(a, a_n) \leq 3/2^n$. En particulier la boule $B(a_n; 1/2^n)$ est incluse dans $B(a; 1/2^{n-2})$. Comme $\mathcal{S}$ est un recouvrement de E, il existe $O \in \mathcal{S}$ tel que $a \in \mathcal{S}$. Comme O est un ouvert pour un n assez grand $B(a_n; 1/2^n) \subset B(a; 1/2^{n-2}) \subset O$. Ceci est en contradiction avec le fait qu´on ne peut pas recouvrir $B(a_n; 1/2^n)$ par un nombre fini d´ouverts de $\mathcal{S}$.

Définition 10. *Soit (E, d) un espace métrique, on dit qu'il est séparable si et seulement si il existe un sous ensemble dense dénombrable.*

Autrement dit il existe une suite de E, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $D = \{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans E. On a le résultat suivant qui sera utile au chapitre 4.

Proposition 10. *Si (E, d) est espace métrique séparable alors pour tout $F \subset E$, (F, d) est aussi un espace métrique séparable.*

On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans E. Pour tout $k \geq 1$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on choisit $x_n^k \in B(x_n; \frac{1}{k}) \cap F$ si ce dernier ensemble est non vide. Le sous ensemble de F, $\{x_n^k / n \in \mathbb{N},\ k \geq 1, B(x_n; \frac{1}{k}) \cap F \neq \emptyset\}$ est dénombrable par réunion dénombrable d´ensembles dénombrables. Il est aussi dense, en effet pour tout $x \in F$ et tout $k \geq 1$ il existe n tel que $x \in B(x_n; \frac{1}{k}) \cap F$ par densité de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E. Dans ce cas $x_n^k \in F$ existe et $d(x, x_n^k) \leq d(x, x_n) + d(x_n, x_n^k) \leq 2/k$.

Le lien entre séparabilité et compacité est donné dans la proposition suivante.

Proposition 11. *Un espace métrique compact (E, d) est séparable.*

Soit $n \geq 1$ un entier, l'espace E est recouvert par les boules $B(x; \dfrac{1}{n})$, $x \in E$. Il existe donc $K_n \in \mathbb{N}$ et $x_1^n, x_2^n, ...x_{K_n}^n \in E$ tels que $E = \cup_{k=1}^{K_n} B(x_k^n; \dfrac{1}{n})$. Soit $D = \{x_k^n \ / \ n \geq 1,\ k = 1, ..., K_n\}$, c'est une union dénombrable d'ensembles finis, D est donc dénombrable. Soit $x \in E$, montrons que $x \in \overline{D}$. Soit $\epsilon > 0$, il existe $n \geq 1$ tel que $\dfrac{1}{n} \leq \epsilon$. Comme $E = \cup_{k=1}^{K_n} B(x_k^n; \dfrac{1}{n})$, il existe k_0 tel que $x \in B(x_{k_0}^n; \frac{1}{n})$. Donc $d(x, x_{k_0}^n) \leq \frac{1}{n} \leq \epsilon$ avec $x_{k_0}^n \in D$. L'ensemble D est donc bien dense et dénombrable.

Définition 11. *Soit $X \subset E$ une partie d´un espace métrique (E, d). On dit que X est relativement compact si sa fermeture $\overline{X}$ est compacte pour la distance induite d.*

Du théorème 3 de la proposition 9 et de l´exercice 12 on déduit immédiatement la proposition suivante. (Les détails de la vérification sont laissés en exercice.)

Proposition 12. *Soit $X \subset E$ une partie d´un espace métrique (E, d). On suppose que E est complet alors si X est précompact il est relativement compact.*

La proposition suivante peut s´énoncer ainsi :

L´image d´un compact par une application continue est compacte.

Proposition 13. *Soit (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques et $f : E \mapsto F$ une fonction continue. Alors si E est compact $f(E)$ est un compact de F.*

La démonstration est aisée si on utilise la compacité séquentielle. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $f(E)$. Il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E telle que $b_n = f(a_n)$. Si E est compact il existe une sous suite $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui est convergente dans E : $a_{n_k} \to a$. Comme f est continue on a $b_{n_k} = f(a_{n_k}) \to b = f(a)$. C´est ce qu´il fallait démontrer.

En général tout produit d´espaces compacts $(E_i)_{i\in\mathcal{I}}$ est aussi un compact pour la topologie dont les ouverts sont engendrés par les ensembles Ω suivants, où pour tout $i_0 \in \mathcal{I}$ O_{i_0} est un ouvert de E_{i_0}

$$\Omega = \{x = (x_i)_{i\in\mathcal{I}} / \ x_i \in E_i, \ x_{i_0} \in O_{i_0}\}.$$

C´est le théorème de Tykhonov. Malheureusement il n´existe pas toujours de métrique correspondant à cette topologie. On préfère donc donner une version plus simple et plus concrète de ce théorème.

Proposition 14. *Soit (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques compacts. On munit $E \times F$ de la distance $\forall(x_1, y_1)$, $\forall(x_2, y_2) \in E\times F$, $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_E(x_1, x_2) + d_F(y_1, y_2)$. Alors $(E\times F, d)$ est aussi un espace métrique compact.*

On vérifie cette proposition grâce à la compacité séquentielle. Soit donc $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E \times F$. Comme E est séquentiellement compact il existe une suite extraite x_{n_k} de la suite x_n qui converge vers une limite $x \in E$. De même, de la suite y_{n_k} de F on peut extraire une suite extraite noté y_{n_p} qui converge vers un $y \in F$. On remarque que la suite x_{n_p} est extraite de la suite convergente x_{n_k} et donc converge aussi. On a donc $d_E(x_{n_p}, x) + d_F(y_{n_p}, y) \to 0$ ce qui montre bien que $(x_{n_p}, y_{n_p}) \to (x, y)$ dans $E \times F$.

Le résultat suivant est aussi très utile et peut s´énoncer :
Une fonction réelle sur un compact atteint ses bornes.

Proposition 15. *Soit (E, d) un espace métrique compact. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue. Alors il existe a, $b \in E$ tel que $\forall x \in E$ on a $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.*

Autrement dit $\inf\limits_{x\in E} f(x)$ et $\sup\limits_{x\in E} f(x)$ sont finis et sont en fait un minimum et un maximum atteints respectivement en $a \in E$ et $b \in E$. En particulier $|f(x)|$ est borné.

Pour la démonstration on considère une suite minimisante, c´est à dire une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f(a_n) \to \alpha = \inf_{x\in E} f(x)$ que α soit fini ou non. Comme E est compact, on peut extraire une suite $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un $a \in E$. Comme f est continue, $f(a_{n_k}) \to f(a)$ ce qui montre que $\alpha = f(a)$. On raisonne exactement de la même façon pour la borne supérieure.

Comme corollaire à cette proposition on obtient la proposition suivante.

Proposition 16. *Soit (E, d) un espace métrique. Si E est compact alors il est borné : il existe $M > 0$ tel que $\forall x$, $y \in E$, $d(x, y) \leq M$.*

On utilise la proposition 15 avec la fonction $f : E \times E \to \mathbb{R}$ défini par $f(x, y) = d(x, y)$. $E \times E$ est bien compact grâce à la proposition 14 et f est bien continue. (Cf exercice 8.)

Proposition 17. *Soit (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques. Soit $f \in C(E; F)$ une fonction continue, alors si E est compact, f est uniformément continue.*

Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in E$, en utilisant la continuité au point x on obtient l´existence de $\eta(x) > 0$ tel que $\forall y \in B(x; \eta(x))$, $d_F(f(x), f(y)) \leq \varepsilon/2$. Les boules $B(x; \eta(x)/2)$ quand x parcourt E sont des ouverts qui recouvrent E. Comme E est compact, il existe $x_1, ...x_N$ tels que $E = \cup_{i=1}^{n} B(x_i; \eta(x_i)/2)$. Soit $\eta = \min\limits_{i=1,...n} \eta(x_i)/2$ alors $\forall y,\ z \in E$ tels que $d_E(y,z) \leq \eta$ il existe $i \in \{1, ...n\}$ tel que $y \in B(x_i; \eta(x_i)/2)$. On a $d_E(x_i, z) \leq d_E(x_i, y) + d_E(y, z) \leq \eta(x_i)/2 + \eta \leq \eta(x_i)$ donc on a y et z qui appartiennent à $B(x_i; \eta(x_i)/2)$. Par conséquent $d_F(f(y), f(z)) \leq d_F(f(x_i), f(y)) + d_F(f(x_i), f(z)) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. f est donc bien uniformément continue.

Chapitre 2

Espaces vectoriels normés

2.1 Généralités et théorème de Riesz

Dans ce chapitre E désignera un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle norme une application $\|.\| : x \in E \mapsto \|x\| \in [0, \infty[$ qui vérifie :

- $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall x \in E$ on a $\|\lambda\, x\| = |\lambda|\ \|x\|$,
- $\forall x \in E$ et $\forall y \in E$ on a $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Définition 12. *Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d´une norme $\|.\|$.*

On a immédiatement la proposition suivante qui permet d´utiliser les résultats du chapitre précédent.

Proposition 18. *Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est un espace métrique pour la distance $d(x, y) = \|x - y\|$.*

La vérification de cette proposition est laissé en exercice. On a

Proposition 19. *Soit V un sous espace vectoriel d´un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$. Alors son adhérence est aussi un sous espace vectoriel de E.*

La vérification est immédiate. Si deux suites de E convergent alors une combinaison linéaire de ces suites converge aussi.

On rappelle aussi le résultat suivant vu au premier cycle.

Proposition 20. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Exercice 13. *Montrer que dans un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$, l´adhérence de la boule ouverte $B(x; r)$ pour $x \in E$ et $r > 0$, est la boule fermé $B_f(x; r)$ et que l´intérieur de la boule fermé $B_f(x; r)$ est la boule ouverte. Comparer avec l´exercice 4.*

Exercice 14. *Montrer que dans un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$, les sous espaces vectoriels de dimension finie sont complets.*

Exercice 15. *On pose $E = C^0([a,b];\mathbb{C})$ l´espace des fonctions complexes continues sur l´intervalle réel $[a,b]$ et pour tout $u \in E$ on définit*

$$\|u\|_1 = \int_a^b |u(t)|\ dt, \qquad \|u\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |u(t)|.$$

Montrer que $(E, \|.\|_1)$ et $(E, \|.\|_\infty)$ sont des espaces vectoriels normés. On note $B^{(1)}$, respectivement $B^{(\infty)}$, les boules pour la norme $\|.\|_1$, respectivement $\|.\|_\infty$. Montrer que $B^{(\infty)}(0;1) \subset B^{(1)}(0;1)$. Existe-t-il $R > 0$ tel que $B^{(1)}(0;1) \subset B^{(\infty)}(0;R)$? Est-ce que $B_f^{(\infty)}(0;1)$ est fermé dans $(E, \|.\|_1)$? Et à l´inverse a-t-on $B_f^{(1)}(0;1)$ fermé dans $(E, \|.\|_\infty)$? Indication : étudier la suite $f_n(x) = n\ e^{-n(x-a)}$.

L´exercice précédent montre deux choses.

Tout d´abord que l´on peut considérer des ensembles de fonctions comme un espace affine ou vectoriel dont les éléments, c´est à dire les points ou les vecteurs, sont des fonctions. Ce point de vue est central en analyse fonctionnelle. Il permet en particulier de trouver des solutions à des problèmes ou l´inconnue est une fonction. La difficulté est que les espaces fonctionnels ont en général une dimension infinie.

Le deuxième point qui mérite d´être souligné est que contrairement à la dimension finie où toutes les normes sont équivalentes, elles ne le sont pas en général. Le choix de la norme pour étudier un espace fonctionnel est donc crucial.

On va maintenant s´intéresser à la compacité. On sait qu´en dimension infinie les compacts sont les fermés bornés. Ce n´est pas le cas en dimension infinie. La proposition suivante est connue sous le nom de lemme de Riesz.

Proposition 21. *(Lemme de Riesz) Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $V \neq E$ un sous espace vectoriel de E. On suppose que V est fermé. Alors pour tout $\alpha \in]0,1[$ il existe un vecteur $x \in E$ de norme $\|x\| = 1$ tel que $d(x, V) > 1-\alpha$.*

La distance d´un point à un ensemble est donnée dans la définition 2. Soit $y \notin V$ qui existe puisque $V \neq E$. On utilise l´exercice 7 pour conclure que $d(y,V) > 0$. Soit $\alpha \in]0,1[$ il existe donc $v \in V$ tel que $\|y - v\| \leq d(y,V)/(1-\alpha)$. On pose $x = \dfrac{y-v}{\|y-v\|}$. Soit $w \in V$ on a

$$\|x - w\| = \frac{\|\ (y - v - \|y-v\|w)\ \|}{\|y-v\|}.$$

Or $v + \|y-v\|w$ appartient à V et donc $\|\ y - v - \|y-v\|w\ \| \geq d(y,V)$. Par conséquent

$$\|x - w\| \geq \frac{d(y,V)}{d(y,V)/(1-\alpha)} = 1-\alpha.$$

On a bien $\|x\| = 1$ et $d(x,V) \geq 1-\alpha$.

On peut maintenant énoncer le théorème de Riesz.

Théorème 4. *La boule unité fermée $B_f(0;1)$ d´un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

Si E est de dimension finie n il existe une base $(e_1, .., e_n)$ de E. L´application $\Phi : \mathbb{K}^n \to E$ définie par $\Phi(x_1, ..., x_n) = \sum_1^n x_k\ e_k$ est un isomorphisme d´espaces vectoriels. On définit une norme sur $\mathbb{K}^n$ par $\|x\| = \|\Phi(x)\|_E$. Pour cette norme que l´on sait équivalente à toute autre norme de $\mathbb{K}^n$, Φ est une isométrie. La boule fermé dans E est l´image de la boule fermé de $\mathbb{K}^n$ par Φ. Or dans $\mathbb{K}^n$ les fermés bornés sont compacts donc la boule fermé est compacte et l´image par une application continue d´un compact est compacte , cf proposition 13. La boule unité fermé de E est bien compacte.

Pour démontrer la réciproque on considère la contrapposée. Soit donc E de dimension infinie. On suppose avoir construit $a_1, ..a_n$, n vecteurs de E tels que $\|a_k\| = 1$ et $\|a_l - a_k\| \geq 1/2$ pour tout $k \neq l$ dans $\{1, ..., n\}$. Soit V_n le sous espace vectoriel engendré par les vecteurs $(a_k)_{k=1,...,n}$. V_n est de dimension finie donc il est fermé, cf exercice 14 et comme E est de dimension infinie $V_n \neq E$. On peut donc appliquer le lemme de Riesz, proposition 21. Il existe a_{n+1} tel que $\|a_{n+1}\| = 1$ et $d(a_{n+1}, V_n) \geq 1/2$. En particulier $\|a_{n+1} - a_k\| \geq 1/2$ pour $k = 1, ..., n$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite est sans point d´accumulation. En effet une suite extraite $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie $\|a_{n_k} - a_{n_{k+1}}\| \geq 1/2$ et ne peut donc pas converger.

2.2 Applications linéaires

En dimension infinie il existe des applications linéaires qui ne sont pas continues. Pour s´en convaincre il suffit de faire l´exercice suivant.

Exercice 16. *Soit* $C^0([-1, 1]; \mathbb{C})$ *l´espace des fonctions complexes continues sur* $[-1, 1]$*. Soit* $H : [-1, 1] \mapsto \mathbb{C}$ *la fonction défini par* $H(t) = -1$ *pour* $t \in [-1, 0[$*,* $H(t) = 1$ *pour* $t \in]0, 1]$ *et* $H(0) = 0$*. On pose*

$$E = \{f = u + \lambda H / \ u \in C^0([-1, 1]; \mathbb{C}), \ \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

et pour tout $f \in E$ *on définit*

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \ dt.$$

Vérifier que E *muni de* $\|.\|_1$ *est bien un espace vectoriel normé.*
Montrer que la suite u_n*,* $u_n(t) = \frac{2}{\pi} arctg(nt)$ *est une suite de* E *qui converge vers* H*.*
Pour $f \in E$ *montrer qu´il existe un unique* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $f - \lambda H \in C^0([-1, 1]; \mathbb{C})$*. On pose* $l(f) = \lambda$*.*
Vérifier que $l : E \mapsto \mathbb{C}$ *est bien linéaire mais que* l *n´est pas continue.*

On se restreint généralement à l´étude des applications linéaires continues. On a le théorème suivant.

Théorème 5. *Soit* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces vectoriels normés et* $\Phi : E \mapsto F$ *une application linéaire. Les proposition suivantes sont alors équivalentes :*
• Φ *est continue en* 0*,*
•• Φ *est uniformément continue sur* E*,*
••• Φ *est bornée : il existe* $M > 0$ *tel que* $\forall x \in E$*,* $\|\Phi(x)\|_F \leq M \ \|x\|_E$*.*

Montrons tout d´abord que • implique •••. Φ étant continue en 0, il existe $\eta > 0$ tel que si $\|x\|_E \leq \eta$ alors $\|\Phi(x)\|_F \leq 1$. Soit maintenant $x \in E$ quelconque non nul. Alors $y = \eta \ x/\|x\|$ est de norme η et donc $\|\Phi(y)\|_F \leq 1$. Mais comme Φ est linéaire on a $\Phi(x) = \Phi(\dfrac{\|x\|}{\eta} y) = \dfrac{\|x\|}{\eta}\Phi(y)$ et donc $\|\Phi(x)\| \leq \dfrac{\|x\|}{\eta}$. D´autre part cette inégalité est évidemment vérifiée pour $x = 0$. On obtient ainsi le résultat recherché avec $M = \dfrac{1}{\eta}$.

Si maintenant ••• est vérifiée alors comme Φ est linéaire on a $\forall x, y \in E$, $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| = \|\Phi(x - y)\| \leq M \ \|x - y\|$. L´application Φ est donc M-Lipschitz et donc uniformément continue. On a obtenu ••.

Il est d´autre part évident que •• entraîne •! On a donc bien montré l´équivalence des propositions.

On définit maintenant la norme des applications linéaires.

Proposition 22. *Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}(E;F)$ l´ensemble des applications linéaire continue de E dans F. Pour $\Phi \in \mathcal{L}(E;F)$ on a :*

$$\sup_{x\in E,\ \|x\|_E=1} \|\Phi(x)\|_F = \sup_{x\in E,\ \|x\|_E\leq 1} \|\Phi(x)\|_F = \sup_{x\in E,\ x\neq 0} \frac{\|\Phi(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Ce nombre noté $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(E;F)}$ défini une norme sur $\mathcal{L}(E;F)$ qui est ainsi un espace vectoriel normé.

La vérification est laissée en exercice.

En général, le sup qui définit la norme n'est pas nécessairement atteint en un point $x_0 \in E$. C´est vrai en dimension finie car la boule unité fermée est compacte et qu´une application continue, ici $x \to \|\Phi(x)\|$, atteint ses bornes sur un compact. Sinon on a le contre-exemple suivant.

Exercice 17. *On considère $E = C^0([0,1];\mathbb{C})$ l´espace des fonctions complexes continues sur $[0,1]$ que l´on munit de la norme $\|u\|_1 = \int_0^1 |u(t)|\ dt$.*
Soit $\Phi : E \mapsto E$ l´application définie par $\Phi(u)(t) = t\ u(t)$.
Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}(E;E)$ et que $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(E;E)} \leq 1$.
En s´aidant de la suite $u_n(t) = (n+1)\ t^n$ montrer que $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(E;F)} = 1$.
Enfin prouver qu´il n´existe pas de $u \neq 0$ tel que $\|\Phi(u)\|_1 = \|u\|_1$.

Finalement on a le résultat suivant sur la composition des applications linéaires continues dont la vérification est laissée au lecteur.

Proposition 23. *Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés. Alors si $\Phi \in \mathcal{L}(E;F)$ et $\Psi \in \mathcal{L}(F;G)$, on a $\Psi \circ \Phi \in \mathcal{L}(E;G)$ et*

$$\|\Psi \circ \Phi\|_{\mathcal{L}(E;G)} \leq \|\Phi\|_{\mathcal{L}(E;F)}\, \|\Psi\|_{\mathcal{L}(F;G)}.$$

2.3 Hyperplans et formes linéaires

On commence par rappeller les définitions d´espaces supplémentaires. Soit E un espace vectoriel et V, W deux sous espaces vectoriels de E. On dit que V et W sont supplémentaire et on note $E = V + W$ si et seulement si pour tout $x \in E$ il existe $v \in V$ et $w \in W$ tels que $x = v + w$. On dit qu´ils sont en somme directe et on note $E = V \oplus W$ si et seulement si ils sont supplémentaires et vérifient $V \cap W = \{0\}$.

Proposition 24. *Soit E un espace vectoriel et V, W deux sous espaces vectoriels de E en somme directe, $E = V \oplus W$. Alors pour tout $x \in E$ il existe un unique couple, $(v,w) \in V \times W$, tels que $x = v + w$. Les applications $\Phi : E \mapsto E$ et $\Psi : E \mapsto E$ définies par $\Phi(x) = v$ et $\Psi(x) = w$ sont des applications linéaires. Φ est la projection sur V parallèlement à W et Ψ la projection sur W parallèlement à V. Si de plus W' est un autre sous espace vectoriel de E tel que $E = V \oplus W'$ alors il existe un isomorphisme d´espaces vectoriels entre W et W'.*

L´unicité de l´écriture provient du fait que si $v + w = v' + w'$ avec $v,\ v' \in V$ et $w,\ w' \in W$ alors $v - v' = w - w'$ appartient à $V \cap W = \{0\}$. On vérifie alors aisément que Φ et Ψ sont linéaires. Si Ψ' est la projection sur W' parallèlement à V alors pour tout $w \in W$ on a $w - \Psi'(w) \in V$ donc $\Psi(w - \Psi'(w)) = 0$. Comme $\Psi(w) = w$ on obtient ainsi $\forall w \in W,\ \Psi \circ \Psi'(w) = w$. Par symétrie entre W et W' on a aussi $\forall w' \in W',\ \Psi' \circ \Psi(w') = w'$. L´application $\Psi' : W \mapsto W'$ est donc un isomorphisme d´inverse $\Psi : W' \mapsto W$.

Il découle de la proposition que si W et W' sont chacun en somme directe avec V alors ils ont même dimension. Par définition cette dimension est la co-dimension de V.

Un hyperplan est un sous espace vectoriel de co-dimension 1.

En dimension infinie comme en dimension finie l´équation d´un hyperplan est donnée par une forme linéaire. En effet si l est une forme linéaire non nulle , c´est à dire une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$, alors il existe $a \in E$ tel que $l(a) \neq 0$. Notons $\mathbb{K}\ a$ la droite engendré par a et $H = \mathrm{N}(l) = l^{-1}(0)$ le noyau de l. On a alors $E = H \oplus \mathbb{K}\ a$. En effet si $x \in E$ alors $h = x - \dfrac{l(x)}{l(a)}\ a$ est bien dans H (car $l(h) = 0$), on a donc $x = h + \lambda a$ avec $\lambda = \dfrac{l(x)}{l(a)}$, $h \in H$ et $\lambda a \in \mathbb{K}\ a$. D´autre part si $h = \lambda a \in H \cap \mathbb{K}\ a$ alors $l(h) = \lambda l(a) = 0$. Donc $\lambda = 0$ et $h = 0$. H est bien un hyperplan, c´est celui d´équation $l(x) = 0$.

Réciproquement si H est un hyperplan, il existe $a \neq 0$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}\ a$. Pour tout $x \in E$ il existe un unique $h \in H$ et un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = h + \lambda a$. On pose $l(x) = \lambda$. l est bien une forme linéaire et $H = \mathrm{N}(l)$. On peut maintenant énoncer la proposition suivante.

Proposition 25. *Les hyperplans H d´espace vectoriel E sont les noyaux des formes linéaires non nulles. Si E est normé et $H = \mathrm{N}(l)$ alors l est continue si et seulement si H est fermé.*

Il reste à démontrer la dernière partie de la proposition. Si l est continue alors l´image réciproque des fermés est fermé, cf proposition 6, donc $H = l^{-1}(0)$ est fermé.

Réciproquement supposons que H est fermé. Soit $\mathbb{K}a$ une droite supplémentaire. Quitte à multiplier a par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ on peut supposer $l(a) = 1$. Si l n´est pas bornée alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\|x_n\| \leq 1$ et $|l(x_n)| \to \infty$. À partir d´un certain rang $l(x_n) \neq 0$ et $\dfrac{1}{l(x_n)}\ x_n \to 0$. Posons $h_n = a - \dfrac{1}{l(x_n)}\ x_n$, on a $h_n \to a$ et $h_n \in H$ car $l(h_n) = 0$. Comme $a \notin H$ c´est en contradiction avec le fait que H fermé. l est donc bornée et donc continue, cf théorème 5.

Exercice 18. *Soit V un sous espace vectoriel d´un espace vectoriel E de co-dimension n.*
Montrer qu´il existe n formes linéaires indépendantes $l_1,\ l_2, ..., l_n$ telles que $v \in V$ si et seulement si $l_1(v) = 0,\ l_2(v) = 0, ..., l_n(v) = 0$.
Montrer que $l_1,\ l_2, ..., l_n$ sont continues si et seulement si V est fermé.
Indication : prendre une base d´un espace W en somme directe avec V et considérer sur W les applications coordonnées.

Soit E un espace vectoriel normé, le dual de E noté E' est l´ensemble $\mathcal{L}(E;\mathbb{K})$ des formes linéaires continues.

On donne sans démonstration le théorème suivant qui est une version du théorème de Hahn Banach.

Théorème 6. *Soit E un espace vectoriel normé et V un sous espace vectoriel de E. Si m est une forme linéaire continue sur V pour la norme induite, alors il existe un prolongement $l \in E'$ de m non nécessairement unique de même norme :*

$$\forall v \in V,\ m(v) = l(v), \qquad \|l\|_{E'} = \|m\|_{V'}.$$

Une conséquence importante de ce théorème est la suivante.

Proposition 26. *Soit E un espace vectoriel normé et $x \in E$. Si pour tout $l \in E'$ on a $l(x) = 0$, alors $x = 0$.*

Cette proposition dit que pour montrer qu´un vecteur est nul il suffit de le tester contre toutes les formes linéaires continues.

Soit $x \neq 0$ un vecteur de E. $\mathbb{K}\ x$ est un sous espace vectoriel de E et $m : \mathbb{K}\ x \mapsto \mathbb{K}$ défini par $m(\lambda\ x) = \lambda$ est une forme linéaire continue de norme $1/\|x\|$. Par le théorème 6, on peut la prolonger par $l \in E'$ et on a $l(x) = m(x) = 1 \neq 0$. On a ainsi démontré la contrapposée de la proposition.

2.4 Exercices

Exercice 19. *On note E l´espace des suites $a = (a_1, ..., a_n, ...)$ de complexes telles que la série $\sum a_n$ est absolument convergente. On pose $\|a\| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.*
1) Montrer que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé.
2) Soit $e^{(k)} \in E$ la suite définie par $e_n^{(k)} = 0$ pour $n \neq k$ et $e_k^{(k)} = 1$. Cette suite (de suites) a-t-elle une valeur d´adhérence ? Que peut-on en conclure ?
3) Pour $R > 0$ fixé on considère

$$K = \{a \in E / \ |a_n| \leq \frac{R}{n^2}\}.$$

Montrer que K est précompact. On pourra commencer par montrer que les ensembles $K_N = \{a \in K / a_n = 0$ pour $n \geq N + 1\}$ sont précompacts.

Exercice 20. *Soit E l´e.v.n. défini dans l´exercice 19 et $u = (u_1, u_2, ...)$ une suite bornée non nulle. Pour $a \in E$ on note $l(a) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \, a_n$.*
1) Montrer que l est une forme linéaire continue.
On note $H = N(l)$ son noyau. On pose $v_n = \dfrac{\overline{u_n}}{n^2}$.
2) Montrer que toute suite $a \in E$ peut se mettre sous la forme $a = \lambda v + b$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $b \in H$ et que cette décomposition est unique.
Soit $W = \{a \in E / \sum n \, a_n$ est absolument convergente$\}$. Pour $a \in E$ on note $a^{(k)} = (a_1, a_2, ..., a_k, 0, 0, ...)$.
3) Montrer que $a^{(k)} \to a$ dans E. W est-il un s.e.v. fermé de E ?
Soit $b \in E \setminus W$ et $E_1 = W \oplus vect(b)$. Pour $a = w + \lambda b$ ($\lambda \in \mathbb{C}$ et $w \in W$) dans E_1 on définit l par $l(a) = \lambda$. Montrer que l est une forme linéaire sur E_1 qui n´est pas continue.

Exercice 21. *Soit $E = L^1(\mathbb{R})$ muni de la norme usuelle. Montrer que*

$$H = \{f \in E / \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x} \, f(x) \, dx\}$$

est un hyperplan fermé et trouver un supplémentaire.

Exercice 22. *Soit E un e.v.n. sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle que pour $x \in E$ et $Y \subset E$ on a*

$$d(x, Y) = inf\{\|x - y\| / \ y \in Y\}.$$

On note $H = l^{-1}(0)$ où l est une forme linéaire continue. Montrer que $d(x, H) = \dfrac{|l(x)|}{\|l\|}$.

Exercice 23. *Soit E un e.v.n. sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un hyperplan affine est par définition de la forme $H = a + H_0$ où $a \in E$ et où H_0 est un hyperplan. Montrer qu´il existe une forme linéaire l et un scalaire α tels que $H = l^{-1}(\alpha)$.*

Exercice 24. *On note L_0 l´espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des suites a de complexes qui tendent vers 0.*
Pour $a \in L_0$ on pose $\|a\| = sup_{n\geq 0}|a_n|$ et $l(a) = \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$.
1) Montrer que pour tout $a \in L_0$ on a $\|a\| < \infty$.
2) Montrer que l est une forme linéaire continue de norme 1 mais que la norme n´est jamais atteinte.
On dit que $H = l^{-1}(\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}$ est un hyperplan d´appui de $A \subset L_0$ ssi :

$$\forall u \in A,\ l(u) \geq \alpha (\textit{ou}\, \forall u \in A,\ l(u) \leq \alpha) \quad \textit{et il existe } u_0 \in A /\ l(u_0) = \alpha.$$

3) Montrer que $B(0;1)$ n´a pas de plan d´appui.

Chapitre 3

Espaces de Banach

3.1 Généralités

Définition 13. *Un espace de Banach est un espace vectoriel complet.*

Cette définition prend tout son sens dans le cas de la dimension infinie. En effet on a en dimension finie le résultat suivant,

Proposition 27. *Les espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont des Banach.*

On a déjà vu que les espaces vectoriels normés E de dimension $N \in \mathbb{N}^*$ sont isométrique à $\mathbb{K}^N$ pour une norme convenable, cf la démonstration du théorème 4 de Riesz. Or $\mathbb{K}^N$ est complet donc E est bien complet.

La démonstration que $\mathbb{K}^N$ est complet, est basée sur un raisonnement coordonnées par coordonnées en utilisant la complétude de $\mathbb{K}$, cf le cours de topologie. On peut refaire la même démonstration pour les espaces de suites.

Exercice 25. *Soit $l^1(\mathbb{N})$ l´espace des suites à termes complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum |a_n|$ est absolument convergente. On pose $\|a\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.*
Montrer que $(l^1(\mathbb{N}), \|.\|_1)$ est un espace vectoriel.
Soit a^k une suite de Cauchy dans $l^1(\mathbb{N})$. Montrer que pour tout n fixé, la suite de $\mathbb{C}$, $(a^k_n)_{k\in\mathbb{N}}$, est de Cauchy.
On pose $a_n = \lim_{k\to\infty} a^k_n$, montrer que la suite a ainsi définie est dans $l^1(\mathbb{N})$ et que $\|a^k - a\|_1 \to 0$.
Conclure que $l^1(\mathbb{N})$ est un espace de Banach.

Par contre, il existe des espaces vectoriels normés qui ne sont pas complets.

Exercice 26. *On pose $E = C^0([-1,1];\mathbb{C})$ l´espace des fonctions complexes continues sur $[-1,1]$ et pour tout $u \in E$ on définit*

$$\|u\|_1 = \int_{-1}^{1} |u(t)|\, dt.$$

On a déjà vu, cf exercice 15, que $(E, \|.\|_1)$ est un espace vectoriel normé.
Montrer que la suite u_n définie par $u_n(t) = n\ \mathrm{arctg}(n\ t)$ a une limite pour la convergence simple que l´on notera u.

A-t-on $u \in E$? Montrer que $\int_{-1}^{1} |u_n(t) - u(t)|\, dt \to 0$ *quand* $n \to \infty$. *En déduire que* $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ *est de Cauchy dans* E.
Montrer que si u_n *a une limite* v *dans* E *alors* $\int_{-1}^{1} |u(t)-v(t)|\, dt = 0$. *En déduire que nécessairement* $v = 1$ *sur* $[0,1]$. *Que ce passe-t-il sur* $[-1,0]$. *Est-ce que* $(E, \|.\|_1)$ *est un Banach ?*
On change de norme et on pose $\|u\|_\infty = \sup_{t\in[-1,1]} |u(t)|$. *Montrer que* $(E, \|.\|_\infty)$ *est un Banach.*

On a le résultat suivant sur l´espace des applications linéaires continues.

Proposition 28. *Soit E un espace vectoriel normé et B un Banach alors $\mathcal{L}(E;B)$ est aussi un espace de Banach pour la norme des applications linéaires.*

Il n´y a que l´espace d´arrivée qui a besoin d´être complet. Soit donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{L}(E;B)$. Pour tout $x \in E$ on a $\|u_n(x) - u_m(x)\|_B \le \|u_n - u_m\|_{\mathcal{L}(E;B)}\ \|x\|$. Par conséquent $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de B. Elle converge donc vers une limite que l´on note $u(x)$. Pour tout $x \in E$, $y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $u_n(\lambda\ x + y) = \lambda\ u_n(x) + u_n(y)$ donc $\lim_{n\to\infty} u_n(\lambda\ x + y) = \lambda \lim_{n\to\infty}\ u_n(x) + \lim_{n\to\infty} u_n(y)$. On a ainsi $u(\lambda\ x + y) = \lambda\ u(x) + u(y)$ et donc u est bien une application linéaire. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \ge 0$ tel que pour tout $n, m \ge N$ on a $\|u_n - u_m\|_{\mathcal{L}(E;B)} \le \varepsilon$. Donc pour tout $x \in E$, pour tout $n, m \ge N$ on a $\|u_n(x) - u_m(x)\|_B \le \varepsilon\ \|x\|$. On garde n fixé et on fait $m \to \infty$ pour obtenir $\|u_n(x) - u(x)\|_B \le \varepsilon\ \|x\|$. Cela montre d´une part que u est continue avec $\|u\|_{\mathcal{L}(E;B)} \le \varepsilon + \|u_n\|_{\mathcal{L}(E;B)}$ et d´autre part que $\|u - u_n\|_{\mathcal{L}(E;B)} \le \varepsilon$. On a bien $u_n \to u$ dans $\mathcal{L}(E;B)$.

La complétude permet de définir des prolongements d´applications linéaires et d´utiliser les séries normalement convergentes.

Proposition 29. *Soit E un espace vectoriel normé et V un sous espace vectoriel dense de E. Soit B un Banach, alors toute application linéaire continue $u : V \to B$ a un prolongement unique en une application $\tilde{u} \in \mathcal{L}(E;B)$.*

C´est une conséquence du théorème 1 de prolongement des applications uniformément continues. En effet u est uniformément continue car elle est linéaire continue, cf théorème 5. Il existe donc un unique prolongement $\tilde{u}$ continu. Il reste à vérifier que $\tilde{u}$ est linéaire. Pour tout $x \in E$, $y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, il existe des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de V tels que $x_n \to x$ et $y_n \to y$. On a par continuité de $\tilde{u}$ et par linéarité de u

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\lambda\ x + y) &= \lim_{n\to\infty} \tilde{u}(\lambda\ x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} u(\lambda\ x_n + y_n)\\ &= \lambda \lim_{n\to\infty}\ u(x_n) + \lim_{n\to\infty} u(y_n) = \lambda\ \tilde{u}(x) + \tilde{u}(y).\end{aligned}$$

Définition 14. *Soit E un espace vectoriel normé, une série de terme général $x_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$ est dite normalement convergente si et seulement si la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_E$ est convergente.*

Il est faux de dire qu´en général une série normalement convergente est convergente dans E, c'est à dire que la suite des sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} x_n$ converge quand $N \to \infty$. On pourra construire un contre-exemple à partir de l´exercice 26. C´est par contre vrai si E est complet.

Proposition 30. *Dans un Banach, les séries normalement convergentes sont des séries convergentes.*

Il suffit de remarquer que les sommes partielles des séries normalement convergentes sont des suites de Cauchy.

3.2 Intégrales des fonctions à valeurs dans les Banach

Il y a deux points de vue possibles pour définir l´intégrale au sens de Lebesgue $I = \displaystyle\int_J f(t)\, dt$ de fonctions $t \to f(t)$ d´un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ (plus généralement de X espace mesuré) à valeurs dans un espace vectoriel normé, E. Si E est de dimension finie, il n´y a pas de difficulté car on peut intégrer coordonnées par coordonnées. Si E est de dimension infinie, il y a deux points de vue.

Le premier consiste à remarquer que les applications coordonnées sont des formes linéaires. On peut généraliser le point de vue et dire que $x(t)$ est intégrable si et seulement si pour toute forme linéaire continue $l \in E'$, la fonction réelle $t \to l(f(t))$ est intégrable. La "coordonnée" suivant l de l´intégrale est définie par $I_l = \int_J l(f(t))\, dt$. Toute la difficulté est d´alors d´identifier ces résultats avec un élément de E : a-t-on un $I \in E$ tel que $I_l = l(I)$?

L´autre possibilité est de dire que $t \to f(t)$ est fortement mesurable si on peut l´approcher par des fonctions étagées, f_k. Si f_k est étagée (c´est à dire prend un nombre fini N de valeurs $x_1, ...x_N$ dans E) alors $I_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} |{f_k}^{-1}(x_n)|\ x_n$ où $|{f_k}^{-1}(x_n)|$ désigne la mesure de Leguesgue du sous ensemble de I, ${f_k}^{-1}(x_n)$. On essaie alors de définir I comme une limite dans E de I_k.

Ces deux approches sont en fait distinctes et il se peut qu´une fonction soit intégrable par la première approche sans qu´elle soit fortement mesurable. On veut avoir à éviter ce genre de subtilité ici. C´est pour quoi on va se limiter à la définition des intégrales au sens de Riemann pour des fonctions continues sur un intervalle borné.

On commence par définir ce qu´est une subdivision d´un intervalle $J = [a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Définition 15. *Une subdivision h de $[a, b]$ est la donnée d´un N-uple, $N \geq 2$, $t_1 = a < t_2 < ... < t_N = b$.*

On définit alors $|h| = \displaystyle\max_{n=1,...N-1} t_{n+1} - t_n$. Si $h = (t_1, ...t_N)$ et si $h' = (t'_1, ...t'_N)$ sont deux subdivisions, on définit une subdivision plus fine $h \uplus h' = (s_1, ..., s_M)$ telle que $\{s_1, ..., s_M\} = \{t_1, ...t_N\} \cup \{t'_1, ...t'_N\}$ en ordonnant l´ensemble $\{t_1, ...t_N\} \cup \{t'_1, ...t'_N\}$.

Soit maintenant B un espace de Banach et $f : J \to B$ une fonction continue. Comme J est compact, la proposition 17 nous indique que f est uniformément continue. Le module de continuité de f est défini par

$$\varepsilon(\eta) = \sup\{\|f(t) - f(s)\|_B \ / \ t, s \in J,\ |t - s| \leq \eta\}.$$

Par continuité uniforme on a $\varepsilon(\eta) \to 0$ quand $\eta \to 0$.

Pour $h = (t_1, ...t_N)$ une subdivision, on défini une fonction en escalier f_h par $f_h(t) = f(t_n)$ pour $t \in [t_n, t_{n+1}[$, $n = 1, ...N-1$ et $f_h(t_N) = f(t_N)$. (On pourrait de façon équivalente définir $f_h(t) = f(t_{n+1}$ pour $t \in]t_n, t_{n+1}]$.) On a le résultat suivant.

Proposition 31. *Soit $a < b$ deux réels, B un espace de Banach et $f \in C([a, b]; B)$. Pour $h = (t_1, ...t_N)$ une subdivision de $[a, b]$, on pose $I_h(f) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} (t_{n+1} - t_n) f(t_n)$. Il existe alors $I(f) \in B$ tel que $I_h(f) \to I(f)$ quand $|h| \to 0$. $I(f)$ est par définition l´intégrale de f sur $[a, b]$, notée :*

$\int_a^b f(t)\ dt = I$. On pose $\int_b^a f(t)\ dt = -\ \int_a^b f(t)\ dt =$. On a

$$\left\| \int_a^b f(t)\ dt \right\|_B \leq |b-a| \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|_B$$

$$\forall c \in [a,b], \qquad \int_a^b f(t)\ dt = \int_a^c f(t)\ dt + \int_c^b f(t)\ dt.$$

I est une aplication linéaire continue, de $C^0([a,b];B)$, muni de la norme $|||f||| = \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|_B$, à valeurs dans B.

On remarque tout d´abord que pour une subdivision h on peut poser $\int_a^b f_h(t)\ dt = I_h$. On va utiliser le critère de Cauchy. Soit $\eta > 0$ et h et h' deux subdivisions telles que $|h| \leq \eta$ et $|h'| \leq \eta$. On pose $(s_1, ..., s_M) = h \uplus h'$. On a alors

$$I_h = \sum_{m=1}^{M-1} f_h(s_m)\,(s_{m+1}-s_m), \qquad I_{h'} = \sum_{m=1}^{M-1} f_{h'}(s_m)\,(s_{m+1}-s_m),$$

$$\|I_h - I_{h'}\|_B \leq \sum_{m=1}^{M-1} \|f_h(s_m) - f_{h'}(s_m)\|_B\,(s_{n+1}-s_n).$$

Supposons par exemple que s_n fasse partie de la subdivision h. On a alors $f_h(s_m) = f(s_m)$. D´autre part $s_m \in [t'_n, t'_{n+1}[$ pour un certain n. On a donc $|s_m - t'_n| \leq |h'| \leq \eta$ et $f_{h'}(s_m) = f(t'_n)$. Par conséquent $|f_h(s_m) - f_{h'}(s_m)| = |f(s_m) - f(t'_n)| \leq \varepsilon(\eta)$. On a la même majoration si s_m fait partie de la subdivision h'. On en conclut que

$$\|I_h - I_{h'}\|_B \leq \sum_{m=1}^{M-1} \varepsilon(\eta)\,(s_{n+1}-s_n) = (b-a)\,\varepsilon(\eta).$$

Cela montre que I_h est une suite de Cauchy qui donc converge dans B vers un élément I. La majoration de l´intégrale I est obtenue en remarquant que pour toute subdivision h la même majoration est obtenue sur I_h. De même la relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$ est démontrée en considérant des subdivisions passant par le point c.

On va faire maintenant le lien entre primitives et intégrales. Si J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé, on rappelle que $f : J \to E$ est dérivable en un point $t \in J$ si et seulement si $\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$ a une limite dans E pour $t+h \in J$ et $h \to 0$. Cette limite est notée $f'(t)$. De même on dit $f \in C^1(J;E)$ si f est dérivable en tout point de J et si $t \in J \to f'(t) \in E$ est une fonction continue.

Proposition 32. *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé. Soit $f : J \to E$ une fonction dérivable en tout point de dérivée nulle, alors f est constante.*

Soit $l \in E'$, on pose $g(t) = l(f(t))$. Cela définit une fonction réelle sur J. De plus on a

$$\frac{g(t+h)-g(t)}{h} = \frac{l(f(t+h)) - l(f(t))}{h} = l\left(\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right).$$

Comme l est continue, g est dérivable et $\forall t \in J,\ g'(t) = 0$. La fonction réelle g est donc constante.

Soit $a \in J$ on en conclut que pour tout $l \in E'$, tout $t \in J$ on a $l(f(t)) = l(f(a))$, $l(f(t) - f(a)) = 0$. Grâce à la proposition 26, on obtient $f(t) = f(a)$, ce qu´il fallait démontrer.

Proposition 33. *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et B un espace de Banach. Soit $f \in C(J;B)$ alors les primitives de f sont les fonctions $F \in C^1(J;B)$ de la forme :*

$$F(t) \ = \ x + \int_a^t f(s)\ ds,$$

où $x \in B$, $a \in J$ sont arbitraires.

Soit F de la forme $F(t) \ = \ x + \displaystyle\int_a^t f(s)\ ds$. On a alors en utilisant la relation de Chasles et la majoration des intégrales

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)\ ds = f(t) + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} (f(s) - f(t))\ ds,$$

$$\left\|\frac{F(t+h) - F(t)}{h} - f(t)\right\|_B \leq \sup_{s,\ |s-t|\leq h} \|f(s) - f(t)\|_B.$$

Comme f est continue au point t on a $\displaystyle\sup_{s,\ |s-t|\leq h} \|f(s) - f(t)\|_B \to 0$ quand $h \to 0$. La fonction F est donc dérivable au point t et $F'(t) = f(t)$.

Réciproquement si G est une autre primitive alors $\dfrac{d}{dt}(G - F) = 0$. En utilisant la proposition 32 on obtient donc qu´il existe $y \in B$ tel que $\forall t \in J$ on a $(G - F)(t) = y$. La fonction G est donc bien de la forme $G(t) = \ y + F(t) = \ y + x + \displaystyle\int_a^t f(s)\ ds$.

3.3 Equations différentielles

Le calcul intégral développé dans la section précédente permet de résoudre des équations différentielles en dimension infinie. On a ainsi toutes les version du théorème de Cauchy Lipschitz. On donne ici une des versions les plus simples.

Théorème 7. *(Cauchy-Lipschitz) Soit B un espace de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et J un intervalle de $\mathbb{R}$. On se donne une fonction, $F : J \times B \to B$, continue et globalement Lipschitz par rapport à sa seconde variable :*

$$\exists L > 0, \quad \forall t \in J,\ \forall x, y \in B, \quad \|F(t,x) - F(t,y)\|_B \leq L\ \|x - y\|_B.$$

Pour tout $t_0 \in J$ et tout $x_0 \in B$ il existe une unique solution $\varphi \in C^1(J;B)$ à l´équation différentielle $y' = F(t,y)$ qui vérifie $\varphi(t_0) = x_0$.

La démonstration est une application du théorème 2 de point fixe de Picard. On commence par remarquer que grâce à la proposition 33 le problème est équivalent à trouver $\varphi \in C^0(J;B)$ tel que

$$\forall t \in J, \qquad \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \varphi(s))\ ds.$$

Cela revient donc à démontrer l´existence et l´unicité d´un point fixe pour l´application $\Psi : C^0(J;B) \mapsto C^0(J;B)$ définie par

$$\forall u \in C^0(J;B), \qquad \forall t \in J,\ \Psi(u)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, u(s))\ ds.$$

Pour ce faire, on va montrer que pour une norme convenablement choisie Ψ est une contraction. Soit $\rho > 0$ pour $u \in C^0(J;B)$ on pose $|||u|||_\rho = \displaystyle\sup_{t\in J}\ e^{-\rho\ |t-t_0|}\ \|u(t)\|_B$. On note $E_\rho(J)$ l´espace vectoriel normé des fonctions $u \in C^0(J;B)$ telles que $|||u|||_\rho < \infty$. On laisse au soin du lecteur de vérifier que $E_\rho(J)$ est un espace de Banach. On peut donc appliquer le théorème de point fixe. (Un espace de Banach est un espace métrique complet.) On a pour tout $t \geq t_0$

$$\begin{aligned}
\Psi(u)(t) - \Psi(v)(t) &= \int_{t_0}^{t} F(s,u(s)) - F(s,v(s))\ ds \\
\|\Psi(u)(t) - \Psi(v)(t)\|_B &\leq \int_{t_0}^{t} L\ \|u(s) - v(s)\|_B\ ds \\
\|\Psi(u)(t) - \Psi(v)(t)\|_B &\leq \int_{t_0}^{t} L\ |||u-v|||_\rho\ e^{\rho\ (s-t_0)}\ ds = \frac{L}{\rho}\ |||u-v|||_\rho\ e^{\rho\ |t-t_0|}.
\end{aligned}$$

On obtient une majoration identique pour $t \leq t_0$, ainsi $|||\Psi(u) - \Psi(v)|||_\rho \leq \dfrac{L}{\rho}\ |||u-v|||_\rho$. Par exemple pour $\rho = 2L$, l´application Ψ est bien contractante. Elle admet un unique point fixe. On a donc une unique solution dans $E_\rho(J)$.

Pour être tout à fait complet il reste à montrer qu´une solution $\varphi \in C^0(J;B)$ appartient nécessairement à $E_\rho(J)$. Si J est compact c´est évident. Sinon pour tout intervalle compact $K \subset J$ contenant t_0, la restriction à K de φ est dans $E_\rho(K)$. Elle est donc égale sur ce compact à la solution de point fixe de Ψ. Comme c´est vrai pour tout K on obtient finalement l´égalité sur J.

3.4 Exercices

Exercice 27. *Déterminer si les espaces suivants sont des Banach.*

1) $E = C^0([0,1];\mathbb{C})$, $\quad \|u\| = \int_0^1 |u(x)|^2\ dx$.
2) $E = \{u \in C^0(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}) /\ |u(x)| \to 0$ *quand* $|x| \to \infty\}$ *où* $|x|$ *est une des normes (équivalentes) de* $\mathbb{R}^N$. $\|u\| = sup_{x\in\mathbb{R}^N}|u(x)|$.
3) E *ensemble des suites complexes qui tendent vers* 0. *Pour* $a \in E$ $\|a\| = sup_{n\geq 0}|a_n|$.
4) E *ensemble des suites complexes* a *telles que* $\sum |a_n|^2$ *soit sommable. La norme est définie par*

$$\|a\| = \left(\sum_0^\infty |a_n|^2\right)^{1/2}.$$

Exercice 28. *Une base algébrique d´un e.v.* E *est un système libre tel que les combinaisons linéaires* finies *engendrent* E.

1) Soit E *l´e.v. des fonctions* $C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, 2π *périodiques. Est-ce que* $\{e^{inx}/\ n \in \mathbb{Z}\}$ *est libre ? Est-ce une base ?*
On suppose désormais que E *est un Banach. On se donne un système dénombrable* $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ *libre de* E *et on pose* $V_N = Vect\{x_1,...,x_N\}$.
2) Dites pourquoi $d_{N+1} = d(x_{N+1}, V_N) > 0$ *et* $d_{N+1} \leq \|x_{N+1}\|$.
On définit par récurrence $\lambda_{N+1} = \dfrac{\lambda_N\ d_N}{4\|x_{N+1}\|}$, $\lambda_1 = \frac{1}{\|x_1\|}$.
3) Montrer que la série $\sum \lambda_N\ x_N$ *est normalement convergente.*
On pose $y = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\ x_n$, $y_N = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n\ x_n$, $r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n\ x_n$.
4) Montrer que $\|r_N\| \leq \frac{1}{3}\lambda_N\ d_N$. *En déduire que* $d(y, V_{N-1}) > \frac{2\lambda_N\ d_N}{3}$.
5) Démontrer la proposition suivante.

Un espace de Banach de dimension infinie n´a pas de base algébrique dénombrable.

Exercice 29. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et I un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$. On note E l´espace de Banach des fonctions réelles bornées et continues sur Ω que l´on munit de la norme du sup.*
Pour $F : I \to E$ on note $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t,x) = F(t)(x)$.
1) Montrer que si $F \in C^0(I;E)$ alors f est continue et que si réciproquement f est uniformément continue $F \in C^0(I;E)$.
2) Montrer de même que si $F \in C^1(I;E)$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ existe pour tout point $(t,x) \in I \times \Omega$.
On se donne $k \in C^0(\overline{I \times \Omega \times \Omega})$ tel que pour une constante $L > 0$ on ait $\forall t \in I,\ \forall x \in \Omega,\ \int_\Omega |k(t,x,y)|\ dy \leq L$. On se donne aussi $u \in E$.
3) Démontrer qu´il existe une unique fonction $f \in C^0(I \times \Omega; \mathbb{R})$ qui a une dérivée partielle par rapport à t et qui vérifie :

$$\forall x \in \Omega,\ f(0,x) = u(x), \quad \forall t \in I,\ \forall x \in \Omega,\ \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \int_\Omega k(t,x,y)\, f(t,y)\ dy.$$

Chapitre 4

Espaces de fonctions continues

4.1 Généralités

Le but de ce chapitre est d´étudier l´espace des fonctions continues et de donner deux théorèmes fondamentaux en analyse. Le premier montre que les polynômes sont denses. C´est le théorème de Stone-Weierstrass. Le second théorème important de ce chapitre est le théorème d´Ascoli. Il dit qu´une famille de fonction est relativement compacte si le module de continuité des fonctions de la famille peut être majoré indépendamment de la fonction considérée ((dans cette famille). Ce critère s´applique en particulier quand la famille est une suite de fonctions. Il permet alors d´extraire une suite qui converge. Ce procédé donne l´existence de solutions de problèmes fonctionnels "compacts". On construit des suites de problèmes approchés que l´on sait résoudre. Si on peut appliquer le théorème d´Ascoli à la suite de solutions de ces problèmes approchés alors la limite de suites extraites peut donner une solution au problème que l´on cherche à résoudre.

On commence par quelques définitions.

Définition 16. *Soit E et F deux espaces métriques, alors $C^0(E;F) = C(E;F)$ désigne l´ensemble des fonctions continues de E dans F. On dit qu'une fonction f est bornée si l'ensemble $f(E)$ est borné : $\sup_{x,y\in E} d_F(f(x), f(y)) < \infty$. Le sous ensemble des fonctions f continues et bornées est noté $C^0_b(E;F)$ ou encore $C_b(E;F)$.*

Si E est compact, comme $f(E)$ est compact si f est continue (proposition 13) on a $f(E)$ qui estbornée (proposition 16), les deux espaces coincident. On a $C_b(E;F) = C(E;F)$.

Proposition 34. *Soit E et F deux espaces métriques, alors $C_b(E;F)$ est un espace métrique pour la distance de la convergence uniforme :*

$$\forall f, g \in C_b(E;F) \quad d_\infty(f,g) = \sup_{x\in E} d_F(f(x), g(x)).$$

Montrons tout d'abord que $d_\infty(f,g)$ est finie. Soit $M_f = \sup_{x,y\in E} d_F(f(x), f(y)) < \infty$ de même pour M_g. Soit $x_0 \in E$ fixé. On a

$$\begin{aligned} d_F(f(x), g(x)) &\leq d_F(f(x), f(x_0)) + d_F(f(x_0), g(x_0)) + d_F(g(x_0), g(x)) \\ &\leq M_f + d_F(f(x_0), g(x_0)) + M_g < \infty. \end{aligned}$$

On a bien $d_\infty(f,g) = 0$ ssi $f = g$, $d_\infty(f,g) = d_\infty(g,f)$. Il reste à vérifier que l'on a l'inégalité triangulaire. Soient f, g, h trois fonctions de $C_b(E;F)$,

$$d_F(f(x), h(x)) \leq d_F(f(x), g(x)) + d_F(g(x), h(x)) \leq d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h)$$

donc

$$d_\infty(f,h) = \sup_{x\in E} d_F(f(x),h(x)) \leq d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h)$$

Pour cette distance la convergence d'une suite f_n vers une fonction f est équivalente à la convergence uniforme.

Proposition 35. *Soit E un espace métrique et F un espace métrique complet alors l´espace $C_b(E;F)$ est aussi un métrique complet pour la distance de la convergence uniforme d_∞. Si B est un espace de Banach alors $C_b(E;B)$ est un espace de Banach pour la norme du sup : pour $f \in C_b(D;B)$, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in D} \|f(x)\|_B$.*

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $C_b(E;F)$ alors pour tout $x \in E$, $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de F. Comme F est complet, ces suites convergent dans F vers une limite notée $u(x)$. On définit ainsi une fonction $u : E \to F$. Soit $\varepsilon > 0$ il existe $N \geq 0$ tel que si $n, m \geq N$ on a $d_\infty(u_n, u_m) \leq \varepsilon$. Donc pour tout $x \in E$, $d_F(u_n(x), u_m(x)) \leq \varepsilon$. En passant à la limite $m \to \infty$ on obtient ainsi pour tout $n \geq N$, pour tout $x \in D$, $d_F(u_n(x), u(x)) \leq \varepsilon$ et donc $d_\infty(u_n, u) \leq \varepsilon$. De plus

$$\begin{aligned}
d_F(u(x),u(y)) &\leq d_F(u(x),u_n(x)) + d_F(u_n(x),u_n(y)) + d_F(u_n(x),u(y)) \\
&\leq 2d_\infty(u,u_n) + d_F(u_n(x),u_n(y)) \\
\sup_{x,y\in E} d_F(u(x),u(y)) &\leq 2d_\infty(u,u_n) + \sup_{x,y\in E} d_F(u_n(x),u_n(y)) < \infty
\end{aligned}$$

par conséquent la fonction u est bornée. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers u. La proposition 8 montre donc que u est continue. On a bien $u \in C_b(E;F)$, et $u_n \to u$ dans $C_b(E;F)$.

On a une structure d´espace vectoriel sur $C(E;F)$ dès que F est un espace vectoriel. Dès que F est normé, $C_b(E;F)$ est un espace vectoriel normé pour la norme du sup. Si B est un Banach alors d'après ce qui précède $C_b(E;B)$ est complet, c'est donc un Banach. Les détails de ces vérifications sont laissées au lecteur.

Le résultat suivant sera utile dans la suite. C'est un critère qui permet de déduire une convergence uniforme d´une convergence simple. Au premier cycle on voit souvent un résultat similaire dont la démonstration est laissée en exercice.

Exercice 30. *Soit J un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction de $C(J;\mathbb{R})$ qui converge simplement vers une fonction $g : J \mapsto \mathbb{R}$. On suppose :*

- • $g \in C(J;\mathbb{R})$,
- • • *les fonctions f_n, $n \in \mathbb{N}$, sont croissantes.*

Alors la convergence est uniforme.

Théorème 8. *(Théorème de Dini) Soit D un espace métrique compact et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction de $C(D;\mathbb{R})$ qui converge simplement vers une fonction $g : D \mapsto \mathbb{R}$. On suppose :*

- • $g \in C(D;\mathbb{R})$,
- • • *la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante : $\forall x \in D$, $\forall n \geq 0$, $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.*

Alors la convergence est uniforme.

Soit $x \in D$ et $\varepsilon > 0$ alors il existe $N = N(x) \in \mathbb{N}$ tel que $g(x) - \varepsilon \leq f_{N(x)}(x) \leq g(x)$. (La suite numérique $f_n(x)$ est croissante et donc majoré par sa limite.) D´autre part en utilisant la continuité de g et $f_{N(x)}$ au point x, on sait qu´il existe $\eta(x)$ tel que si $y \in B(x;\eta(x))$ alors

$g(x)+\varepsilon \geq g(y) \geq g(x)-\varepsilon$ et $f_{N(x)}(x)+\varepsilon \geq f_{N(x)}(y) \geq f_{N(x)}(x)-\varepsilon$. Comme la suite est croissante on a donc que pour tout $n \geq N(x)$ et tout $y \in B(x,\eta(x))$

$$g(y) \geq f_n(y) \geq f_{N(x)}(y) \geq f_{N(x)}(x) - \varepsilon \geq g(x) - 2\,\varepsilon \geq g(y) - 3\,\varepsilon.$$

Mais par compacité de D il existe $x_1, ...x_K$ tels que $D = \cup_{k=1,...K} B(x_k, \eta(x_k))$. Pour $n \geq N = \max\{N(x_1), ...N(x_K)\}$ et tout $y \in D$ il existe $k \in \{1, ..., K\}$ tel que $y \in B(x_k, \eta(x_k))$ et $n \geq N_k(x)$ on peut donc appliquer la majoration ci dessus pour obtenir $g(y) \geq f_n(y) \geq g(y) - 3\,\varepsilon$. On a ainsi $\|g - f_n\|_\infty \leq 3\,\varepsilon$.

Exercice 31. *Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de $\mathbb{R}[X]$ définie par récurrence par :*

$$P_0 = 0, \qquad P_{n+1} = P_n \ + \ \frac{1}{2}\,(X - {P_n}^2).$$

Montrer que la suite de fonctions $t \mapsto P_n(t)$ est une suite croissante sur $[0,1]$ qui vérifie $\forall t \in [0,1],\ 0 \leq P_n(t) \leq \sqrt{t}$.
En déduire que $P_n(t) \to \sqrt{t}$ uniformément sur $[0,1]$.

Le résultat de cet exercice sera utile dans la prochaine section.

4.2 Théorème de Stone-Weierstrass

Définition 17. *Un ensemble $\mathcal{A}$ de fonctions réelles ou complexes sur un ensemble D est une algèbre sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ si et seulement si c´est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et si $\forall f,\ g \in \mathcal{A}$, la fonction $fg : x \in D \mapsto f(x)\ g(x)$, appartient aussi à $\mathcal{A}$.*

Il résulte de la définition que si $f \in \mathcal{A}$, algèbre de fonctions sur $\mathbb{K}$, alors $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, on a $P(f)$ qui est dans $\mathcal{A}$. Réciproquement si f est une fonction réelle ou complexe, il est aisé de vérifier que $\{P(f)\ /\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ est une algèbre. Cela explique pourquoi les polynômes vont jouer un role central dans cette section.

Proposition 36. *Soit D un espace métrique et $\mathcal{A}$ une algèbre incluse dans $C_b(D;\mathbb{R})$. On munit $C_b(D;\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme. Dans ce cas $\overline{\mathcal{A}}$ est aussi une algèbre et si f, g sont dans $\overline{\mathcal{A}}$ alors $|f|$, $\min(f,g)$, $\max(f,g)$ sont aussi dans $\overline{\mathcal{A}}$.*

Les fonctions $\min(f,g)$, $\max(f,g)$ sont par définition

$$\min(f,g) : x \in D \mapsto \min(f(x), g(x)), \qquad \max(f,g) : x \in D \mapsto \max(f(x), g(x)).$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que si f, g sont continues en un point x il en est de même pour les fonctions $\min(f,g)$, $\max(f,g)$.

Vérifions d´abord que $fg \in \overline{\mathcal{A}}$ si f et g appartiennent à $\overline{\mathcal{A}}$. On a alors deux suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}$ qui convergent uniformément vers respectivement f et g. On a $(f_n\ g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est une suite de $\mathcal{A}$ et qui converge uniformément vers $f\ g$. En effet

$$\sup_{x\in D}(f_n\ g_n(x) - f\ g(x)) \leq \sup_{x\in D}(f_n(x))\ \sup_{x\in D}(g_n(x) - g(x)) + \sup_{x\in D}(g(x))\ \sup_{x\in D}(f_n(x) - f(x)).$$

Or il est aisé de vérifier qu´il existe $C > 0$ tel que pour tout n on a $\sup_{x\in D}(f_n(x)) \leq C$. On a ainsi $\|f_n\ g_n - f\ g\|_\infty \leq C\|\ g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty\ \|\ f_n - f\|_\infty \to 0$. Le produit $f\ g$ appartient donc à $\overline{\mathcal{A}}$. L´adhérence d´un espace vectoriel étant un espace vectoriel (proposition 19) on en conclut que $\overline{\mathcal{A}}$ est une algèbre.

Maintenant si $f \in \overline{\mathcal{A}}$ avec $f \neq 0$, comme $\overline{\mathcal{A}}$ est une algèbre, $P_n\left(\dfrac{f^2}{{\|f\|_\infty}^2}\right)$ est aussi dans $\overline{\mathcal{A}}$, où $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de polynômes définie dans l´exercice 31. Remarquons que pour tout $x \in D$ on a $\dfrac{f(x)^2}{\|f\|_\infty{}^2}$ qui appartient à $[0,1]$. Par conséquent le fait que P_n converge uniformément vers la racine carré implique que la suite $P_n\left(\dfrac{f^2}{\|f\|_\infty{}^2}\right)$ converge uniformément sur D vers $\sqrt{\dfrac{f^2}{\|f\|_\infty{}^2}} = \dfrac{|f|}{\|f\|_\infty}$. Cette limite appartient donc à $\overline{\mathcal{A}}$ et par linéarité on en déduit que $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$.

On a $\min(f,g) = \dfrac{1}{2}(|f-g|+g-f)$ et $\max(f,g) = \dfrac{1}{2}(|f-g|+f-g)$. Donc si $f,\ g \in \overline{\mathcal{A}}$ alors comme $\overline{\mathcal{A}}$ est un sous espace vectoriel on a $f-g \in \overline{\mathcal{A}}$ et par ce qui précède $|f-g| \in \overline{\mathcal{A}}$. On en déduit que $\min(f,g)$ et $\max(f,g)$ appartiennent à $\overline{\mathcal{A}}$.

Théorème 9. *(Stone-Weierstrass) Soit D un espace métrique compact et $\mathcal{A}$ une sous algèbre de $C(D;\mathbb{R})$. Si*
• La fonction constante égale à 1 appartient à $\mathcal{A}$,
•• $\mathcal{A}$ est séparante, c´est à dire $\forall x,\ y \in D$ il existe $f \in \mathcal{A}$ tel que $f(x) \neq f(y)$
alors l´algèbre $\mathcal{A}$ est dense dans $C(D;\mathbb{R})$.

Soit $f \in C(D;\mathbb{R})$ quelconque. On cherche à approcher f par des fonctions de $\mathcal{A}$. On se donne donc $\varepsilon > 0$ et on cherche à approcher f à ε-près. La demonstration ce fait en trois étapes.

Première étape : pour tout couple de réels α et β et tout couple de points y et $z \in D$, il existe $g \in \mathcal{A}$ tel que $g(y) = \alpha$ et $g(z) = \beta$.
En effet comme $\mathcal{A}$ est séparante il existe $h \in \mathcal{A}$ tel que $h(y) \neq h(z)$. Comme $\mathcal{A}$ est un espace vectoriel et que la fonction constante égale à 1 appartient à $\mathcal{A}$, la formule $g(x) = \alpha + \beta\,\frac{h(x)-h(y)}{h(z)-h(y)}$ définit une fonction $g \in \mathcal{A}$ qui vérifie bien la propriété voulue.

Deuxième étape : il existe une fonction $h_y \in \overline{\mathcal{A}}$ telle que $h_y(y) = f(y)$ et telle que pour tout $x \in D$ on a $h_y(x) \leq f(x) + \varepsilon$.
On fixe y. D´après ce qui précède il existe pour tout $z \in D$, $g_z \in \mathcal{A}$ telle que $g_z(y) = f(y)$ et $g_z(z) = f(z)$. Par continuité de $g_z - f$ au point z on sait qu´il existe η_z tel que $\forall x \in B(z;\eta_z)$ on a $(g_z - f)(x) \leq \varepsilon$. La compacité de D entraîne l´existence de $z_1, ..., z_N$ qui vérifie $D = \cup_1^N B(z_k;\eta_{z_k})$. On utilise maintenant la proposition 36. La fonction $h_y = \min\limits_{k=1,...,N} g_{z_k}$ est dans $\overline{\mathcal{A}}$. On a $h_y(y) = \min_{k=1,...,N} g_{z_k}(y) = f(y)$. De plus pour tout $x \in D$ il existe $p \in \{1,...,N\}$ tel que $x \in B(z_p;\eta_{z_p})$. Donc $g_{z_p}(x) - f(x) \leq \varepsilon$ et $h_y(x) - f(x) = \min_{k=1,...,N} g_{z_k}(x) - f(x) \leq \varepsilon$.

Troisième étape : on construit une fonction $g \in \overline{\mathcal{A}}$ telle que pour tout $x \in D$ on a $|g(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.
Pour cela on recommence ce que l´on a fait pour le min avec le max de fonction h_y. La fonction $h_y - f$ est continue en y donc il existe η_y tel que $\forall x \in B(y;\eta_y)$ on a $(h_y - f)(x) \geq -\varepsilon$. La compacité de D entraîne l´existence de $y_1, ..., y_M$ qui vérifie $D = \cup_1^M B(y_k;\eta_{y_k})$. Or grâce à la proposition 36 la fonction $g = \max_{k=1,...,M} h_{y_k}$ appartient à $\overline{\mathcal{A}}$. Comme pour tout $x \in D$ et tout $k = 1,..M$ on a $h_{y_k}(x) \leq f(x) + \varepsilon$ on a aussi $g(x) \leq f(x) + \varepsilon$. De l´autre coté $\forall x \in D$ il existe $p \in \{1,...,M\}$ tel que $x \in B(y_k;\eta_{y_k})$ et donc $h_{y_p}(x) \geq f(x) - \varepsilon$. On a donc $g(x) = \max_{k=1,...,M} h_{y_k}(x) \geq h_{y_p}(x) \geq f(x) - \varepsilon$.

Pour tout ε on a trouvé une fonction $g \in \overline{\mathcal{A}}$ qui approche f à ε-près. La fonction f est donc aussi dans $\overline{\mathcal{A}}$ car c´est un fermé. Donc comme f est quelconque on a $\overline{\mathcal{A}} = C(D;\mathbb{R})$.

Corollaire 1. *Soit K un fermé borné de $\mathbb{R}^N$ alors $\mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$, l´ensemble des polynômes à N variables, est dense dans $C(K;\mathbb{R})$.*
On note $C_{per,L}(\mathbb{R})$ l´ensemble des fonctions réelles continues de période $L > 0$. Alors l´ensemble

des polynômes trigonométriques

$$\mathcal{T} = \{p : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \;/\; p(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \;\cos(\frac{2\pi n x}{L}) + b_n \;\sin(\frac{2\pi n x}{L}),\; a_n \in \mathbb{R},\; b_n \in \mathbb{R}\}$$

est dense dans $C_{per,L}(\mathbb{R})$ pour la norme du sup.

Ces deux résultats du corollaire sont très souvent utilisés. Ce sont des conséquences du théorème de Stone Weiersrtass. Pour démontrer la première assertion on commence par remarquer que K est un compact puisque c´est un fermé borné de $\mathbb{R}^N$. Les polynômes considérés comme des fonctions sur K sont bien une algèbre qui contient les fonctions constantes. Il reste à vérifier qu´elle est séparée. Or si $a \neq b$ dans K alors pour au moins une coordonnée on a $a_i \neq b_i,\; i \in \{1, ..N\}$. La fonction coordonnée $p_i(x) = x_i$ est bien un polynôme et sépare les points a et b.

La vérification de la deuxième assertion est un peu plus délicate. Les constantes sont bien des polynômes trigonométriques. D´autre part p est un polynôme trigonométrique si et seulement si $p(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \;\exp(\frac{2\; i\; \pi n x}{L})$ où cette fois les coefficients c_n sont dans $\mathbb{C}$ et $p(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En utilisant cette dernière caractérisation des polynômes trigonométriques on vérifie immédiatement que c´est une algèbre. Le problème est qu´elle n´est pas séparante sur $\mathbb{R}$ à cause de la périodicité. $\forall x \in \mathbb{R},\; \forall p \in \mathcal{T}, p(x + L) = p(x)$ donc l´algèbre ne sépare pas x de $x + L$. L´idée alors est de faire correspondre aux fonctions périodiques, des fonction de S_1, le cercle $\{z \in \mathbb{C},\; |z| = 1\}$. Pour $u \in C_{per,L}(\mathbb{R})$ on définit $\tilde{u} : S_1 \mapsto \mathbb{R}$ par $\tilde{u}(z) = u(2\pi x/L)$ où $2\pi x/L$ est n´importe quel argument de z, $z = e^{2\; i\; \pi x/L}$. L´image d´une fonction continue périodique sur $\mathbb{R}$ est bien continue sur S_1 pour la distance induite par la norme de $\mathbb{C}$. D´autre part S_1 est bien compact étant un fermé borné. Comme $\widetilde{uv} = \tilde{u}\tilde{v}$ l´image de $\mathcal{T}$ est bien une algèbre et elle contient les constantes. Les images de $x \to \cos(2\pi x/L)$ et de $x \to \sin(2\pi x/L)$ sont les fonctions $z \to \mathrm{Re}(z)$ et $z \to \mathrm{Im}(z)$. Si $z_1 \neq z_2$ alors une de ces fonctions ne prend pas la même valeur donc l´algèbre image, $\tilde{\mathcal{T}}$, est séparante. On peut donc appliquer le théorème à $\tilde{\mathcal{T}}$ qui est donc dense dans $C(S_1; \mathbb{R})$. Comme ˜est une isométrie pour les normes du sup on obtient le résultat souhaité.

4.3 Equicontinuité

Une notion connue qui s'est déjà montrée très utile pour l'étude des fonctions continues est l'uniforme continuité. On demande de controler les variations de la fonction indépendamment du point où on la considère. Au lieu de faire varier le point où l'on étudie la continuité on peut faire varier la fonction dans un ensemble donné. On emploie le terme de famille de fonctions de façon synonyme à ensemble de fonctions. Si on a tout une famille de fonctions on peut demander en plus de contrôler les variations de ces fonctions autour d'un point donné indépendamment de la fonction considérée. On dit alors que la famille de fonctions est équicontinue.

Définition 18. *Soit E et F deux espaces métriques et $\mathcal{F} \subset C^0(E; F)$, une famille de fonctions. La famille $\mathcal{F}$ est équicontinue en un point $x_0 \in E$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$ et tout $x \in E$ vérifiant $d_E(x, x_0) \leq \eta$ on a $d_F(f(x), f(x_0)) \leq \epsilon$.*

Il faut bien remarquer que le η doit être le même pour toutes les fonctions f.

On dira de même qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue en x_0 si l'ensemble $\mathcal{F} = \{f_n,\; n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinu en x_0.

On sait qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue. L'équicontinuité permet d'obtenir le même résultat en ne supposant que la convergence simple.

Proposition 37. *Soit E et F deux espaces métriques et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C^0(E; F)$, équicontinue en $x_0 \in E$. Si la suite f_n converge simplement vers une fonction $g : E \mapsto F$ alors g est aussi continue en x_0.*

En reprenant les notations de la définition 18 on a pour $x \in E$ avec $d_E(x, x_0) \leq \eta$ que pour tout n $d_F(f_n(x), f_n(x_0)) \leq \epsilon$. Il ne reste qu'à passer à la limite quand $n \to \infty$ pour conclure que g est continue.

Exercice 32. *Déterminer si les familles de $C^0([-1,1];\mathbb{R})$ suivantes sont équicontinues ou non en 0 :*

$$\mathcal{F}_1 = \{x \mapsto \frac{1}{n}\cos(nx) + (1+x)^\alpha / \ n = 1, 2, \dots \ \alpha \in [-1,1]\},$$
$$\mathcal{F}_2 = \{x \mapsto \exp(\lambda + x) / \ \lambda \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{F}_3 = \{x \mapsto \mathrm{arctg}(n\ x) / \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Proposition 38. *Soit E et F deux espaces métriques et $\mathcal{F} \subset C^0(E;F)$, équicontinue en $x_0 \in E$. La fermeture $\overline{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ est aussi équicontinue en x_0.*

Soit $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in B_E(x_0;\eta)$ et tout $f \in \mathcal{F}$ on a $d_F(f(x), f(x_0)) \leq \epsilon/2$. les paramètres ϵ, η sont maintenant fixé. Soit g une fonction quelconque de $\overline{\mathcal{F}}$. Il existe $f \in \mathcal{F}$ tel que $\|g - f\|_\infty \leq \epsilon/4$. On a

$$d_F(g(x), g(x_0)) \leq d_F(g(x), f(x)) + d_F(f(x), f(x_0)) + d_F(f(x_0), g(x_0)) \leq \epsilon/4 + \epsilon/2 + \epsilon/4 = \epsilon.$$

Dans la définition de la continuité le paramètre η dépend a priori de la fonction f et du point considéré x_0. La continuité uniforme spécifie que η ne dépend pas de x_0, l'équicontinuité que η ne dépend pas de f. On peut demander les deux à la fois : c'est l'uniforme équicontinuité.

Définition 19. *Soit E et F deux espaces métriques et $\mathcal{F} \subset C^0(E;F)$, une famille de fonctions. La famille $\mathcal{F}$ est équicontinue si et seulement si elle est équicontinue en tout point de E.*

La famille $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$ et tout $x,\ y \in E$ vérifiant $d_E(x,y) \leq \eta$ on a $d_F(f(x), f(y)) \leq \epsilon$.

Une fonction continue sur un compact K est uniformément continue sur K. On a l'analogue pour une famille de fonctions équicontinue sur un compact.

Proposition 39. *Soit E et F deux espaces métriques et $\mathcal{F} \subset C^0(E;F)$ une famille équicontinue. Si E est compact alors $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue.*

Soit $\epsilon > 0$ et $x \in E$, $\mathcal{F}$ est équicontinue en x donc il existe $\eta(x)$ tel que :

$$\forall y \in B_E(x, \eta(x)),\ \forall f \in \mathcal{F}, \qquad d_F(f(y), f(x)) \leq \epsilon/2.$$

On a $E = \cup_{x\in E} B_E(x;\eta(x)/2)$ et si E est compact il existe un recouvrement fini et donc $x_1, \dots x_N \in E$ tel que $E = \cup_{n=1,\dots N} B_E(x_n, \eta(x_n)/2))$.

On choisit maintenant $\eta = \dfrac{1}{2} \min\limits_{n=1,\dots N} \eta(x_n)$. Soit $x,\ y \in E$ tels que $d_E(x,y) \leq \eta$. Il existe m tel que $x \in B_E(x_m, \eta(x_m)/2)$ et

$$d_E(y, x_m) \leq d_E(y, x) + d_E(x, x_m) \leq \eta + \eta(x_m)/2 \leq \frac{1}{2}\eta(x_m) + \eta(x_m)/2 = \eta(x_m).$$

Comme x et y sont dans $B_E(x_m; \eta(x_m)\,/2)$ on a

$$\forall f \in \mathcal{F},\ d_F(f(y), f(x_m)) \leq \epsilon/2 \text{ et } d_F(f(x), f(x_m)) \leq \epsilon/2.$$

Par conséquent $d_F(f(x), f(y)) \leq \epsilon$.

Un des résultats centraux de l'analyse fonctionnelle est le suivant.

Théorème 10. *(Théorème d'Ascoli) Soit E un espace métrique compact et F un espace métrique complet. Si une famille $\mathcal{F} \subset C^0(E;F)$ vérifie :*

(a) $\mathcal{F}$ est équicontinue,
(b) $\forall x \in E,\ K_x = \{f(x)\ /\ f \in \mathcal{F}\}$ est un sous ensemble relativement compact de F,
alors $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $C^0(E;F)$ pour la norme du sup.

On commence par démontrer le résultat intermédiaire suivant.

Lemme 1. *Soit E un espace métrique compact et F un espace métrique complet. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite équicontinue de $C^0(E;F)$. On suppose qu'il existe un sous ensemble, $D \subset E$, dense tel que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur D. Alors il existe $f \in C^0(E;F)$ tel que $f_n \to f$ uniformément sur E.*

D'après la proposition 39, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément équicontinue. Soit $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in E$ avec $d_E(x,y) \le \eta$ et pour toutes les fonctions $f_n,\ n \in \mathbb{N}$ on a $d_F(f_n(x), f_n(y)) \le \epsilon$. Si $f_n \to f$ simplement sur D on obtient par passage à la limite $\forall x, y \in D$ avec $d_E(x,y) \le \eta$, $d_F(f(x), f(y)) \le \epsilon$. La fonction $f : D \to F$ est donc uniformément continue. D'après le théorème 1, f a un unique prolongement uniformément continu de E dans F que l'on notera aussi f. Reste à montrer que $f_n \to f$ uniformément.

Soit $\epsilon > 0$, il existe η_1 tel que pour tout $x, y \in E$ avec $d_E(x,y) \le \eta_1$ et pour toutes les fonctions $f_n,\ n \in \mathbb{N}$ on a $d_F(f_n(x), f_n(y)) \le \epsilon/3$. Comme f est uniformément continue, il existe η_2 tel que $\forall x, y \in D$ avec $d_E(x,y) \le \eta_2$, $d_F(f(x), f(y)) \le \epsilon/3$. On pose $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$. L'ensemble D est dense donc $E = \cup_{x\in D} B_E(x;\eta)$. Comme E est compact il existe $x_1, ...x_K \in D$ tels que $E = \cup_{k=1}^{K} B_E(x_k;\eta)$. Les suites $f_n(x_1), ..., f_n(x_K)$ convergent par hypothèse vers $f(x_1), ..., f(x_K)$ dans F quand $n \to \infty$. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \ge N, \quad \forall k \in \{1, 2, ..., K\},\ d_F(f_n(x_k), f(x_k)) \le \epsilon/3.$$

Soit $x \in E$ et $n \ge N$. Il existe k tel que $x \in B_E(x_k;\eta)$. On a $d_E(x, x_k) \le \eta_1$ et $d_E(x, x_k)_l eq \eta_2$ donc $d_F(f_n(x), f_n(x_k)) \le \epsilon/3$ et $d_F(f(x), f(x_k)) \le \epsilon/3$. Finalement on obtient

$$\begin{aligned} d_F(f_n(x), f(x)) &\le d_F(f_n(x), f_n(x_k)) + d_F(f_n(x_k), f(x_k)) + d_F(f(x_k), f(x)) \\ &\le \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon \end{aligned}$$

ce qui montre la convergence uniforme.

Tout est maintenant en place pour démontrer le théorème d'Ascoli.

On remarque tout d'abord que $\overline{\mathcal{F}}$ vérifie (a) et que si $g \in \overline{\mathcal{F}}$ alors pour tout $x \in E$, $g(x) \in \overline{\{f(x)\ /\ f \in \mathcal{F}\}}$ qui est compact dans F. $\overline{\mathcal{F}}$ vérifie donc aussi (b). Il faut démontrer que $\overline{\mathcal{F}}$ est compact dans $C^0(E;F)$. Comme E est compact, $C^0(E;F) = C^0_b(E;F)$, c'est donc un espace métrique pour la distance de la convergence uniforme (proposition 34). La compacité de $\overline{\mathcal{F}}$ est donc équivalente à la compacité séquentielle (théorème 3).

Soit donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à tremes dans $\overline{\mathcal{F}}$. On va extraire une suite convergente. Grâce au lemme 1 il suffit d'extraire une suite qui va converger simplement sur un ensemble D dense dans E. Comme E est compact c'est un espace séparable (proposition 11). Donc il existe un ensemble dénombrable dense $D = \{x_k \in E\ /\ k \in \mathbb{N}\}$.

L'ensemble $\{f_n(x_0)\ /\ n \in \mathbb{N}\} \subset \{g(x_0)\ /\ g \in \overline{\mathcal{F}}\}$ est, d'après (b), relativement compact dans F. On peut donc extraire une sous suite convergente. Il existe $\varphi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tel que $f_{\varphi_0(n)}(x_0)$ converge quand $n \to \infty$.

De même l'ensemble $\{f_{\varphi_0(n)}(x_1)\ /\ n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact. Il existe $\psi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tel que en posant $\varphi_1 = \psi_1 \circ \varphi_0$, on a $f_{\varphi_1(n)}(x_1)$ qui converge quand $n \to \infty$. Par construction on a aussi $f_{\varphi_1(n)}(x_0)$ qui converge quand $n \to \infty$.

Ainsi de suite on construit $f_{\varphi_k(n)}$ extraite de $f_{\varphi_{k-1}(n)}$,... extraite de $f_{\varphi_0(n)}$ tel que $f_{\varphi_k(n)}(x_k)$, $f_{\varphi_k(n)}(x_{k-1})$,... $f_{\varphi_k(n)}(x_0)$ convergent quand $n \to \infty$.

Pour construire la suite extraite qui va converger pour tout les $x_k,\ k \in \mathbb{N}$, on utilise alors le procédé diagonal de Cantor. Considérons la suite $f_{\varphi_n(n)}$. Soit $k \in \mathbb{N}$, pour $n \ge k$ les termes $f_{\varphi_n(n)}$ sont extraits de la suite $f_{\varphi_k(n)}$ donc $f_{\varphi_n(n)}(x_k)$ converge quand $n \to \infty$. La suite $f_{\varphi_n(n)}$ extraite de f_n converge donc simplement sur D ce qu'il fallait démontrer.

4.4 Exercices

Exercice 33. *Pour les deux suites* $(f_n)_{n\geq 1}$ *suivantes déterminer leur limites simples et dire si la convergence est uniforme sur l'intervalle* $[0,1]$.
1) $f_n(x) = x^n$
2) $f_n(x) = (1-x)x^n$
Soit maintenant f_n *une suite de fonctions réelles qui sont croissantes sur [a,b]. On suppose qu'elles convergent simplement vers une fonction continue g sur [a,b].*
3) Montrer alors que la convergence est uniforme.

Exercice 34. *Soit* D *un espace métrique et* E *un Banach. On suppose qu'une suite* (f_n) *de* $C_b^0(D;E)$ *converge uniformément sur un sous ensemble dense* A *de* D. *Montrer que la convergence est uniforme sur* D *tout entier.*

Exercice 35. *Soit* $P_1(X) = X$, $P_{n+1}(X) = P_n(X) + \dfrac{1}{2}(X - P_n^2(X))$.
1) Montrer qu'on définit ainsi une suite de polynômes. Quel est le degré de P_n *?*
2) Montrer que sur l'intervalle $[0,1]$ *la suite est croissante et que pour tout* n

$$\forall t \in [0,1], \quad 0 \leq P_n(t) \leq \sqrt{t}.$$

3) En déduire que pour tout $t \in [0,1]$, *la suite* $P_n(t)$ *converge vers une limite que l'on déterminera.*
4) Conclure que la convergence est uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 36. *Soit* D *un espace métrique compact et* $\mathcal{A}$ *une sous algèbre de* $C^0(D;\mathbb{R})$ *qui n'est pas séparante. Montrer qu'elle n'est pas dense.*

Exercice 37. *Soit* D *et* E *deux espaces métriques compacts. Montrer que toute fonction de* $C^0(D\times E;\mathbb{R})$ *peut s'approcher uniformément par des sommes de fonctions à variables séparées :*
pour tout $f \in C^0(D\times E;\mathbb{R})$, *pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $\phi_i \in C^0(D;\mathbb{R})$ *et* $\psi_i \in C^0(E;\mathbb{R})$ *pour* $i = 1, ..., N$ *telles que*

$$\forall (x,y) \in D \times E, \quad |f(x,y) - \sum_1^N \phi_i(x)\ \psi_i(y)| \leq \epsilon.$$

Chapitre 5

Espaces de Hilbert et convexité

5.1 Généralités

On commence par rappeler quelques définitions.

Définition 20. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, une application, $a : E \times E \to \mathbb{C}$, est une forme sesquilinéaire si et seulement si elle est antilinéaire en la première variable et linéaire en la deuxième variable. C'est à dire :*

$$\begin{array}{lll} \forall x \in E, & y \mapsto a(x,y) & \text{est une forme linéaire,} \\ \forall y \in E, & x \mapsto \overline{a(x,y)} & \text{est une forme linéaire.} \end{array}$$

Une forme sesquilinéaire a est hermitienne si et seulement si

$$\forall x, y \in E, \qquad a(y,x) = \overline{a(x,y)}.$$

Une forme sesquilinéaire a vérifie donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall x_1, x_2, y \in E, \quad a(\lambda x_1 + x_2, y) = \overline{\lambda} a(x_1, y) + a(x_2, y)$$

de même que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall x, y_1, y_2 \in E, \quad a(x, \lambda y_1 + y_2) = \lambda a(x, y_1) + a(x, y_2).$$

On remarque aussi que pour une forme hermitienne on a $\forall x \in E,\ a(x,x) \in \mathbb{R}$.

Définition 21. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, une forme hermitienne $a : E \times E \to \mathbb{C}$ est positive si et seulement si $\forall x \in E,\ a(x,x) \geq 0$. Elle est définie positive si et seulement si elle est positive et $x \in E,\ a(x,x) = 0$ implique $x = 0$.*

Définition 22. *Un E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ est dit préhilbertien s'il est muni d'une forme hermitienne définie positive. On la note pour $x, y \in E$, (x,y).*

Exercice 38. *Vérifier que les espaces suivant sont préhilbertiens.*

$$E = C^0([0,1];\mathbb{C}), \quad \forall f, g \in E,\ (f,g) = \int_0^1 \overline{f(t)}\ g(t)\ dt.$$

$$E = l_2 = \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ a_n \in \mathbb{C},\ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\}, \quad \forall a, b \in E, (a,b) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n}\ b_n.$$

Proposition 40. *Soit E un espace préhilbertien, c'est un espace normé pour la norme définie par $\forall x \in E,\ \|x\| = \sqrt{(x,x)}$. On a de plus*

$$\begin{aligned}\forall x, y \in E, \quad & \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(x,y), \\ & \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \\ & |(x,y)| \leq \|x\| \ \|y\|.\end{aligned}$$

Les deux premières égalités sont le résultat de calculs immédiats. L'inégalité est l'inégalité de Cauchy Schwarz. Elle se démontre de la façon suivante. Le polynôme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \|x+ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t\mathrm{Re}(x,y) + t^2 \ \|y\|^2$$

est positif ou nul donc son discriminant est négatif ou nul. Cela donne $|\mathrm{Re}(x,y)| \leq \|x\| \ \|y\|$. On a : $(x,y) = |(x,y)| \ e^{i\theta}$ pour un $\theta \in \mathbb{R}$. Donc

$$|(x,y)| = (e^{i\theta}x, y) = \mathrm{Re}(e^{i\theta}x, y) \leq \|e^{i\theta}x\| \ \|y\| = \|x\| \ \|y\|.$$

On peut maintenant démontrer l'inégalité triangulaire. En effet

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(x,y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \ \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

On vérifie alors aisément que $\|.\|$ est bien une norme, ce qui termine la démonstration.

Exercice 39. *Soit $z \in E$, espace préhilbertien,montrer que $x \mapsto (z,x)$ est une forme linéaire continue et déterminer sa norme.*
Montrer que le produit scalaire : (x,y) est continu sur $E \times E$.
Soit a une forme sesquilinéaire, montrer qu'elle est continue si et seulement si elle est bornée : il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall x, y \in E,\ |a(x,y)| \leq C\|x\| \ \|y\|$.

5.2 Orthogonalité

Définition 23. *Soit E un espace préhilbertien, on dit que $x, y \in E$ sont orthogonaux si et seulement si $(x,y) = 0$. On dit qu'une suite de E finie $(e_1, ..., e_N)$ ou infinie $(e_n)_{n\geq 1}$ forme un système orthogonal si et seulement si $\forall n \neq m,\ (e_n, e_m) = 0$. Le système est orthonormal si de plus $\forall n,\ \|e_n\| = 1$.*

Proposition 41. *(Inégalité de Bessel Parseval.) Soit $(e_1, ..., e_N)$ un système orthogonal d'un espace préhilbertien E. On a alors la relation de Pythagore : $\|e_1 + e_2 + ...e_N\|^2 = \|e_1\|^2 + ...\|e_N\|^2$. Si $(e_n)_{n\geq 1}$ forme un système orthonormal alors pour tout $x \in E$ on a l'inégalité de Bessel Parseval*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, x)|^2 \leq \|x\|^2.$$

La relation de Pythagore se démontre par une récurrence immédiate. Pour obtenir l'inégalité de Bessel Parseval considérons $x_N = \sum_{n=1}^{N} (e_n, x) \ e_n$. Comme $(e_n)_{n=1,...N}$ est un système orthogonal on a par Pythagore $\|x_N\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |(e_n, x)|^2$. Or

$$(x_N, x) = \sum_{n=1}^{N} ((e_n, x) \ e_n, x) = \sum_{n=1}^{N} \overline{(e_n, x)}(e_n, x) = \|x_N\|^2$$

donc $(x_N, x - x_N) = 0$ et toujours par Pythagore

$$\|x\|^2 = \|(x - x_N) + x_N\|^2 = \|(x - x_N)\|^2 + \|x_N\|^2 = \|(x - x_N)\|^2 + \sum_{n=1}^{N} |(e_n, x)|^2.$$

Les sommes partielles $\sum_{n=1}^{N} |(e_n, x)|^2$ sont donc majorées par $\|x\|^2$. La série est donc absolument convergente et est majorée par $\|x\|^2$.

La suite $(x_N)_{N\geq 1}$ est de Cauchy. En effet pour $M > N$, $\|x_N - x_M\|^2 = \sum_{n=N+1}^{M} |(e_n, x)|^2$ tend vers 0 quand $N, M \to \infty$. Mais la suite ne converge pas nécessairement, pour cela il faudrait que E soit complet.

On va maintenant étudier les relations d'orthogonalité entre ensembles. On rappelle tout d'abord que si B est une partie d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

$$\mathrm{Vect}(B) = \{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n\ x_n,\ \lambda_n \in \mathbb{K},\ x_n \in B,\ n = 1, 2, ..., N,\ N \in \mathbb{N}, \}$$

est l'espace vectoriel engendré par B.

Définition 24. *Soit $B \subset E$, espace préhilbertien. L'orthogonal de B est l'ensemble*

$$B^{\perp} = \{x \in E,\ \forall b \in B,\ (b, x) = 0\}.$$

Proposition 42. *Soit $B \subset E$, espace préhilbertien. L'orthogonal $B^{\perp}$ est un sous espace vectoriel fermé de E et $B \cap B^{\perp} \subset \{0\}$. Si $B \subset C$ alors $C^{\perp} \subset B^{\perp}$. On a de plus $B^{\perp} = \mathrm{Vect}(B)^{\perp} = \overline{\mathrm{Vect}(B)}^{\perp}$.*

Soit $b \in E$, $b^{\perp} = \{b\}^{\perp}$ est par définition le noyau de la forme linéaire continue $x \mapsto (b, x)$, cf exercice 39. C'est donc un sous espace vectoriel fermé. Par conséquent $B^{\perp} = \cap_{b\in B} b^{\perp}$, intersection de sous espaces vectoriels fermés est donc aussi un sous espace vectoriel fermé. D´autre part si $x \in B \cap B^{\perp}$ alors x est orthogonal à lui même et donc $\|x\|^2 = (x, x) = 0,\ x = 0$.

Si $B \subset C$ alors $C^{\perp} = \cap_{b\in C} b^{\perp} \subset \cap_{b\in B} b^{\perp} = B^{\perp}$. Par conséquent $(\overline{\mathrm{Vect}(B)})^{\perp} \subset (\mathrm{Vect}(B))^{\perp} \subset B^{\perp}$.

Si $x \in B^{\perp}$ alors pour tout $b_1, ..., b_N \in B$ et tout $\lambda_1, ..., \lambda_N \in \mathbb{C}$ on a

$$(x, \sum_{n=1}^{N} \lambda_n\ b_n) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n\ (x, b_n) = 0.$$

Donc $x \in (\mathrm{Vect}(B))^{\perp}$, cela montre que $B^{\perp} \subset (\mathrm{Vect}(B))^{\perp}$. Réciproquement, si $x \in (\mathrm{Vect}(B))^{\perp}$, soit $c \in \overline{\mathrm{Vect}(B)}$: il existe une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\mathrm{Vect}(B))$ tel que $c_n \to c$. On a $(x, c_n) = 0$ et comme le produit scalaire est continu $(x, c) = \lim_{n\to\infty}(x, c_n) = 0$. On obtient ainsi $x \in (\overline{\mathrm{Vect}(B)})^{\perp}$. On a donc $B^{\perp} \subset (\mathrm{Vect}(B))^{\perp} \subset (\overline{\mathrm{Vect}(B)})^{\perp}$. On a démontré précédemment l´inégalité inverse, ce qui achève la preuve de la proposition.

Définition 25. *Soit $\mathcal{T}$ un sous ensemble de E, espace préhilbertien. On dit que $\mathcal{T}$ est total si et seulement si le sous ensemble vectoriel qu´il engendre, noté* $\mathrm{Vect}(\mathcal{T})$ *est dense dans E.*

Soit $\mathcal{T} \subset E$, si $x \in \mathcal{T}^{\perp}$ alors d´après la proposition 42, on a par Pythagore $\forall t \in \mathrm{Vect}(\mathcal{T})$

$$\|x - t\|^2 = \|x\|^2 + \|t\|^2, \quad \|x\| \leq \|x - t\|$$
$$\|x\| \leq \inf\{\|x - t\|;\ t \in \mathrm{Vect}(\mathcal{T})\} = dist(x, \mathcal{T}).$$

Donc si $x \neq 0$ sa distance à $\mathrm{Vect}(\mathcal{T})$ est strictement positive. $\mathrm{Vect}(\mathcal{T})$ ne peut donc pas être dense. Par conséquent on a

Proposition 43. *Si $\mathcal{T}$ un sous ensemble de E, espace préhilbertien, est total alors $\mathcal{T}^{\perp} = \{0\}$.*

La réciproque est fausse dans un cadre préhilbertien général. On peut prendre par exemple $E = C^0([-1, 1]; \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)\ g(x)\ dx$ et $\mathcal{T} = \{f \in E;\ \int_{-1}^{0} f(x)\ dx = \int_{0}^{1} f(x)\ dx\}$. On vérifie que $\mathcal{T}^{\perp} = \{0\}$ pourtant $\mathcal{T}$ n'est pas dense.

5.3 Convexité et projections orthogonales

Définition 26. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un sous ensemble $C \subset E$ est convexe si et seulement si*

$$\forall x, y \in C,\ \forall \theta \in [0,1], \qquad \theta\ x + (1-\theta)\ y \in C.$$

Autrement dit si x et y sont deux points de C le segment reliant x à y doit être inclus dans C. On a le résultat classique suivant.

Proposition 44. *Les barycentres à poids positifs de points d'un convexe C sont dans C :*

$$\forall x_1, ...x_N \in C,\ \forall \lambda_1, ...\lambda_N \geq 0,\ \ \textit{avec} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n = 1, \qquad \sum_{n=1}^{N} \lambda_n\ x_n \in C.$$

La démonstration se fait par récurrence sur N. Par définition c'est vrai pour $N = 2$. Si la proposition est vrai pour N, considérons $x_1, ...x_{N+1} \in C$ et $\lambda_1, ...\lambda_{N+1} > 0$, avec $\sum_{n=1}^{N+1} \lambda_n = 1$. On pose $\theta = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n > 0$ et $\mu_n = \lambda_n/\theta$. L'hypothèse de récurrence implique que $y = \sum_{n=1}^{N} \mu_n\ x_n \in C$. Par conséquent $\theta\ y + (1-\theta)\ x_{N+1} \in C$. Or $\theta\ y = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n\ x_n$ et $(1-\theta) = \lambda_{N+1}$ d'où le résultat.

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant.

Théorème 11. *Soit C un convexe* complet *d'un espace préhilbertien E. Pour tout $x \in E$ il existe un unique point $P_C x$, projection orthogonale de x sur C, tel que :*

$$\|x - P_C x\| = d(x, C) = \inf\{\|x - y\|,\ y \in C\}.$$

La projection $P_C x$ est caractérisée par

$$P_C x \in C, \qquad \forall y \in C,\ \mathrm{Re}(x - P_C x, y - P_C x) \leq 0.$$

De plus P_C est une contraction pour tout $x_1, x_2 \in E$, $\|P_C x_1 - P_C x_2\|_E \leq \|x_1 - x_2\|_E$.

Dans l'énoncé ci-dessus "caractérisé" signifie que $P_C x$ est l'unique solution du problème : trouver $z \in C$ tel que pour tout $y \in C$ on ait $\mathrm{Re}(x - z, y - z) \leq 0$.

Pour la démonstration du théorème considérons une suite minimisante $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de C : $\|y_n - x\| \to \delta = d(x, C)$ quand $n \to \infty$. On a vu à la proposition 40 que $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$ ce qui donne pour $a = x - y_n$ et $b = x - y_m$

$$4\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2.$$

Or comme $\frac{y_n+y_m}{2} \in C$ on a $\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\| \geq \delta$. Par conséquent

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\delta^2.$$

Quand n et $m \to \infty$ on a $\|x - y_n\| \to \delta$ et $\|x - y_m\| \to \delta$, donc $\|y_n - y_m\| \to 0$ quand n et $m \to \infty$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy de C qui est supposé complet. Elle converge donc vers un point $P_C x \in C$ et $\|x - P_C x\| = \delta$. Si z est un autre point de C vérifiant la même relation alors la suite $(P_C x, z, P_C x, z, ..., P_C x, z, ...)$ est aussi une suite minimisante et par le même raisonnement que précédemment elle converge. Cela implique $z = P_C x$ et donc l'unicité.

Si $z \in C$ vérifie $\forall y \in C,\ \mathrm{Re}(x - z, y - z) \leq 0$ alors pour tout $y \in C$

$$\|x - y\|^2 = \|(x - z) + (z - y)\|^2 = \|(x - z)\|^2 + \|(z - y)\|^2 - 2\mathrm{Re}(x - z, y - z) \geq \|(x - z)\|^2.$$

Donc z réalise le minimum de la distance de x aux points de C ce qui implique $z = P_C x$.

Réciproquement si on pose $z = P_C x$ alors pour tout $y \in C$ et tout $t \in [0,1]$ on a $t\, y + (1-t)\, z \in C$ et donc $\|x - (t\, y + (1-t)\, z)\|^2 \geq \|x - z\|^2$. On obtient

$$\|x - z - t(y-z)\|^2 - \|x - z\|^2 = t^2\ \|y - z\|^2 - 2t\ \mathrm{Re}(x - z, y - z) \geq 0$$

pour tout $t \in [0,1]$. En particulier la dérivée par rapport à t de cette fonction doit être positive ou nulle en $t = 0$. Cela donne $-2\ \mathrm{Re}(x - z, y - z) \geq 0$ ce qui conduit au résultat souhaité.

Pour montrer la contractivité des projections, appliquons maintenant le critère pour $P_C x_1$ avec $y = P_C x_2$ et pour $P_C x_2$ avec $y = P_C x_1$. On obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(x_1 - P_C x_1, P_C x_2 - P_C x_1) + \mathrm{Re}(x_2 - P_C x_2, P_C x_1 - P_C x_2) &\leq 0 \\ \mathrm{Re}(x_1 - x_2 + (P_C x_2 - P_C x_1), P_C x_2 - P_C x_1) &\leq 0 \\ \|P_C x_2 - P_C x_1\|^2 &\leq \mathrm{Re}(x_2 - x_1, P_C x_2 - P_C x_1). \end{aligned}$$

L´inégalité de Cauchy Schwarz permet de conclure.

Corollaire 2. *Soit V un sous espace vectoriel* complet *et non réduit à $\{0\}$ d'un espace préhilbertien E. Pour tout $x \in E$ il existe un unique point $P_V x$, projection orthogonale de x sur V, tel que :*

$$\|x - P_V x\| = d(x, V) = \inf\{\|x - y\|,\ y \in V\}.$$

La projection $P_V x$ est caractérisée par

$$P_V x \in V, \qquad \forall y \in V,\ (x - P_V x, y) = 0.$$

De plus $P_V \in \mathcal{L}(E)$ et $\|P_V\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$.

Un sous espace vectoriel est convexe, donc il suffit d'appliquer le théorème précédent. La projection est caractérisé par $P_V x \in V, \quad \forall y \in V,\ \mathrm{Re}(x - P_V x, y - P_V x) \leq 0$. En posant $y' = y - P_V x$ (V est un s.e.v.) on a donc $\forall y' \in V,\ \mathrm{Re}(x - P_V x, y') \leq 0$. On applique cette relation pour $-y'$, $i\ y'$ et $-i\ y'$ successivement pour obtenir $(x - P_V x, y') = 0$. Cette caractérisation montre aussi que P_V est linéaire. Comme P_V est une contraction on a $\|P_V\|_{\mathcal{L}(V)} \leq 1$, comme P_V est l´identité sur V on a en fait égalité.

Proposition 45. *(Orthonormalisation.) Soit $V_1 \subset V_2 \subset ... V_n \subset V_{n+1} \subset ...$ une suite strictement croissante de sous espaces vectoriels d´un espace préhilbertien E avec $V_1 \neq \{0\}$. Si les V_n sont complets, il existe alors un système orthonormal $e_1, e_2, ..., e_n, ...$ tel que $e_n \in V_n \cap V_{n-1}^{\perp}$. Si $\forall n$, $\dim(V_n) = n$ alors il existe un système orthonormal $e_1, e_2, ..., e_n, , ...$ tel que $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base orthogonale de V_n.*

On obtient le résultat par une récurrence sur n. Pour construire e_1 on normalise un vecteur non nul de V_1. Supposons $(e_1, ..., e_n)$ construits. Les espaces V_n sont complets, on peut donc appliquer le corollaire 2. Soit $a_{n+1} \in V_{n+1} \setminus V_n$, ce vecteur existe car $V_n \neq V_{n+1}$. On pose alors $e_{n+1} = \dfrac{P_{V_n} a_{n+1}}{\|P_{V_n} a_{n+1}\|}$ et on vérifie que ce choix convient.

Si les V_n sont de dimensions finies ils sont complets. (Voir l´exercice (14).) On construit comme précédemment $e_1, e_2, ..., e_n, ...$. Comme $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est un système libre de cardinal n de V_n de dimension n c´est bien une base.

On doit remarquer que l´on a un procédé effectif de calcul des e_n une fois les a_n déterminés. En effet on a

$$e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}, \quad e_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (e_k, a_{n+1}) e_k \Big/ \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (e_k, a_{n+1})^2}.$$

C´est le procédé d´orthonormalisation de Gram-Schmidt.

5.4 Espaces de Hilbert

Définition 27. *Un espace de Hilbert H est un espace préhilbertien complet.*

On rappelle qu´un sous ensemble fermé d´un espace complet est complet, cf proposition 9. On peut donc projeter sur tout convexe fermé et en particulier sur les sous espaces vectoriels fermé.

Proposition 46. *Soit V un sous espace vectoriel fermé d´un espace de Hilbert H. On a alors $H = V \oplus V^\perp$ et $V^{\perp\perp} = V$.*

Soit $x \in H$ on a evidemment $x = P_V x + (x - P_V x)$ et $P_V x \in V$, $(x - P_V x) \in V^\perp$. Cela montre que $H = V + V^\perp$ et comme $V \cap V^\perp = \{0\}$, cette somme est bien directe. On a évidemment $V \subset V^{\perp\perp}$ et si $x \in V^{\perp\perp}$ alors $x - P_V x \in V^{\perp\perp}$ car $P_V x \in V \subset V^{\perp\perp}$. On a aussi $x - P_V x \in V^\perp$ donc $x - P_V x = 0$, $x = P_V x \in V$. Cela termine la démonstration.

Corollaire 3. *Un sous ensemble $\mathcal{T}$ d´un espace de Hilbert H est total si et seulement si $\mathcal{T}^\perp = \{0\}$.*

On a déjà vu (proposition 43) que nécessairement $\mathcal{T}^\perp = \{0\}$ si $\mathcal{T}$ est total. De plus, au vu de la proposition 46, on a

$$H = \overline{\mathrm{Vect}(\mathcal{T})} \oplus \overline{\mathrm{Vect}(\mathcal{T})}^\perp = \overline{\mathrm{Vect}(\mathcal{T})} \oplus \mathcal{T}^\perp.$$

Cela montre que $\mathcal{T}^\perp = \{0\}$ est une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{T}$ soit total.

Définition 28. *Une famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d´un espace de Hilbert H est une base hilbertienne si et seulement si elle est orthonormale et totale.*

Proposition 47. *Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne d´un espace de Hilbert H. Alors pour tout $x \in H$*

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (e_n, x)\, e_n$$

où la série est convergente dans H.

Posons $a_n = (e_n, x)$. Par Bessel Parseval (Proposition 41) on a $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 \leq \|x\|^2$. Soit $x_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n e_n$. Par Pythagore on a pour $M > N$, $\|x_N - x_M\| = (\displaystyle\sum_{n=N+1}^{M} |a_n|^2)^{1/2}$. Comme la série est convergente cela montre que $(x_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et converge donc vers $x_\infty \in H$. Fixons $n \in \mathbb{N}$, pour $N \geq n$ on a $(x_N, e_n) = a_n = (x, e_n)$. Par passage à la limte $N \to \infty$ on obtient $(x_\infty, e_n) = (x, e_n)$, $(x - x_\infty, e_n) = 0$. Cela montre que $x - x_\infty \in \{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}^\perp$, comme $\{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est total, par le corollaire 3, on en conclut que $\{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$ et donc $x = x_\infty$.

Proposition 48. *Un espace de Hilbert H admet une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si H est séparable.*

Soit H séparable, il existe alors (cf définition 10) une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ dense. On pose alors $W_n = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_n)$. On a $W_n \subset W_{n+1}$ et $\dim(W_{n+1}) \leq 1 + \dim(W_n)$, quitte à réindexer $V_k = W_n$ avec $\dim(V_k) = k$. Grâce à la proposition 45, on peut donc trouver $(e_n)_{n\geq 1}$ un système orthonormal tel que $(e_1, ..., e_k)$ soit une base de V_k. Par conséquent

$$\mathrm{Vect}\{e_n;\ n \geq 1\} = \cup_{k\geq 1} V_k = \cup_{n\in\mathbb{N}} W_n, \qquad \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{Vect}\{e_n;\ n \geq 1\}.$$

Comme $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense il est total et donc (proposition 42 et corollaire 3)

$$\{e_n;\ n \geq 1\}^\perp = \mathrm{Vect}\{e_n;\ n \geq 1\}^\perp \subset \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}.$$

Par conséquent $\{e_n;\ n \geq 1\}$ est un système orthonormal total : c´est une base hilbertienne.

Réciproquement si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne alors

$$\Big\{\sum_{n=1}^{N}(r_n + is_n)e_n;\ N \in \mathbb{N},\ r_n, s_n \in \mathbb{Q}\Big\}$$

est dénombrable et dense. H est séparable.

5.5 Théorèmes de représentation

Dans cette section H désigne un espace de Hibert et H' son dual, l´ensemble des formes linéaires continues sur H (section 2.3). On commence par un théorème de représentation des formes linéaires par des vecteurs.

Théorème 12. *(Théorème de représentation de Riesz). Soit $l \in H'$, une forme linéaire continue, alors il existe un unique vecteur $u \in H$ tel que*

$$\forall v \in H, \qquad l(v) = (u, v).$$

Montrons l´unicité. Si deux vecteurs u_1, u_2 correspondent à la même forme linéaire alors pour tout v on a $(u_2 - u_1, v) = 0$ et en prenant $v = u_2 - u_1$ on en déduit que $u_2 = u_1$.

Passons maintenant à l´existence. Si $l = 0$ alors $u = 0$ est l´unique vecteur qui convient. Si $l \neq 0$, soit $V = \mathrm{N}(l)(= l^{-1}(\{0\}))$. V est un hyperplan fermé donc $H = V \oplus V^\perp$ avec $V^\perp$ de dimension 1. Soit donc a un vecteur non nul de $V^\perp$. Pour tout $v \in H$ il exite un unique $\lambda \in \mathbb{C}$ et un unique $w \in V$ tel que $v = w + \lambda\, a$. On a ainsi

$$l(v) = \lambda l(a), \quad (a, v) = \lambda \|a\|^2.$$

En posant $u = \dfrac{\overline{l(a)}}{\|a\|^2}\, a$ on a bien $l(v) = (u, v)$.

Par conséquent on peut représenter les formes sesquilinéaires par des applications linéaires. Cela correspond en dimension finie, à la representation des formes sesquilinéaires par des matrices.

Corollaire 4. *Soit a une forme sesquilinéaire continue, alors il existe $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que*

$$\forall (u, v) \in H \times H, \qquad a(u, v) = (Au, v).$$

Remarque 1. *a est continue si et seulement si elle est bornée. (Voir exercice 39.) Soit $C > 0$ tel que*

$$\forall (u, v) \in H \times H, \qquad |a(u, v)| \leq C\|u\|\,\|v\|,$$

alors $\|A\|_{\mathcal{L}(H)} \leq C$.

En effet on a $a(u, Au) = (Au, Au) = \|Au\|^2 \leq C\,\|u\|\,\|Au\|$.

Pour montrer l´existence de A on considère à u fixé $l : v \in H \mapsto a(u, v)$. D´après le théorème 12, il existe un unique vecteur que nous noterons Au tel que $\forall v \in H$, on a $l(v) = a(u, v) = (Au, v)$. On vérifie aisément que A est linéaire.

On en déduit la proposition suivante concernant l´existence d´un adjoint.

Proposition 49. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ alors il existe un unique opérateur A^* tel que*

$$\forall (u, v) \in H \times H, \qquad (Au, v) = (u, A^* v).$$

C´est l´opérateur adjoint. On a de plus $\|A^*\|_{\mathcal{L}(H)} = \|A\|_{\mathcal{L}(H)}$ *et* $A^{**} = A$.

La relation ci dessus est équivalente à

$$\forall (u,v) \in H \times H, \qquad (A^*u, v) = \overline{(v, A^*u)} = \overline{(Av, u)} = (u, Av).$$

Posons alors $\forall (u,v) \in H \times H,\ a(u,v) = (u, Av)$. Au vu du corollaire 4, il existe un unique opérateur $A^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que

$$\forall (u,v) \in H \times H, \qquad (A^*u, v) = a(u,v) = (u, Av).$$

De plus on a alors

$$\begin{aligned} \forall u \in H, \qquad & \|A^*u\|^2 = (u, AA^*u) \leq \|AA^*\|_{\mathcal{L}(H)} \|u\|^2 \leq \|A\|_{\mathcal{L}(H)} \|A^*\|_{\mathcal{L}(H)} \|u\|^2, \\ & \|A^*\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \sqrt{\|A\|_{\mathcal{L}(H)} \|A^*\|_{\mathcal{L}(H)}}. \end{aligned}$$

On a donc $\|A^*\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(H)}$ et par conséquent aussi $\|A^{**}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|A^*\|_{\mathcal{L}(H)}$. On vérifie par ailleurs aisément que $A^{**} = A$. Cela donne le résultat.

Définition 29. *Un opérateur* $A \in \mathcal{L}(H)$ *est dit hermitien si et seulement si* $A = A^*$.

Proposition 50. *Soit* $A \in \mathcal{L}(H)$ *et* a *la forme sesquilinéaire correspondante :*

$$\forall (u,v) \in H \times H, \qquad a(u,v) = (Au, v).$$

L´opérateur A *est hermitien si et seulement si la forme sesquilinéaire* a *est hermitienne.*

En effet on a

$$\begin{aligned} & a(u,v) - \overline{a(v,u)} = (Au, v) - \overline{(Av, u)} = (Au, v) - (u, Av) = (Au, v) - (A^*u, v) \\ & a(u,v) - \overline{a(v,u)} = (Au - A^*u, v). \end{aligned}$$

Cette expression est nulle pour tout $u, v \in H$, si et seulement si a est hermitien et si et seulement si A est hermitien.

Le résultat suivant est très important en vue de ces nombreuses applications. Il généralise au cas non symétrique le théorème de représentation de Riesz.

Théorème 13. *(Théorème de Lax Milgram.) Soit* a *une forme sesquilinéaire continue. On suppose qu´elle est coercive, c´est à dire :*

$$\exists \alpha > 0, \qquad \forall u \in H,\ \mathrm{Re}\ a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2.$$

Alors pour toute forme linéaire $l \in H'$*, il existe un unique vecteur* $u \in H$ *tel que*

$$\forall v \in h, \qquad a(u,v) = l(v)$$

Remarque 2. *Si* a *est de plus hermitienne alors* $(u,v)_a = a(u,v)$ *définit un produit scalaire sur* H *dont la norme* $\|u\|_a = \sqrt{a(u,u)}$ *est équivalente à la norme de départ de* H*. Dans ce cas le théorème de Lax Milgram est strictement équivalent au théorème de représentation de Riesz pour le p.s.* $(.,.)_a$*. Ce théorème n´a donc d´intéret que quand* a *est non hermitien.*

On utilise le théorème 12 de représentation de Riesz pour en déduire l´existence de $f \in H$ et de son corollaire 4 pour en déduire l´existence de $A \in \mathcal{L}(H)$ tels que

$$\forall u, v \in H, \qquad l(v) = (f, v), \qquad a(u,v) = (Au, v).$$

Le problème revient alors à résoudre $Au = f$. On va écrire ce problème comme un problème de point fixe. En effet pour tout $\rho > 0$, u est solution si et seulement si $u = F_\rho(u)$ avec $F_\rho(u) = u - \rho\, Au + \rho\, f$. Remarquons que a étant coercive on a $(Au, u) \geq \alpha\|u\|^2$. On a donc pour tout $u, v \in H$

$$\begin{aligned}
\|F_\rho(u) - F_\rho(v)\|^2 &= \|(u-v) - \rho\ A(u-v)\|^2 \\
&= \|(u-v)\|^2 - 2\rho \mathrm{Re}(A(u-v), u-v) + \rho^2\|A(u-v)\|^2 \\
&\leq \|(u-v)\|^2 - 2\rho\alpha\|(u-v)\|^2 + \rho^2\|A\|^2_{\mathcal{L}(H)}\|(u-v)\|^2, \\
&\leq \Big(1 - \rho(2\alpha - \rho\|A\|^2_{\mathcal{L}(H)})\Big)\|(u-v)\|^2.
\end{aligned}$$

Pour $0 < \rho < \alpha/(2\|A\|^2_{\mathcal{L}(H)})$, l´application est donc strictement contractante. D´après le théorème 2 de Picard, il existe donc dans ce cas un unique point fixe. Cela termine la démonstration.

5.6 Exercices

Exercice 40. *E désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Soit C un ouvert convexe contenant* 0. *On définit sa jauge par*

$$\forall x \in E, p(x) = inf\{\alpha > 0/\frac{1}{\alpha}.x \in C\}.$$

On va montrer que la jauge d'un convexe joue le role d'une norme dont la boule unité serait ce convexe.
1) Montrer que $p(0) = 0$, et que $C = \{x \in E/\ p(x) < 1\}$. Que vaut p si $C = B(0;1)$?
2) Montrer que $\forall\lambda > 0$, $\forall x \in E$, $\quad p(\lambda.x) = \lambda p(x)$, puis que $\forall x, y \in E$, $\quad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.
3) Prouver qu´il existe une constante $M > 0$ telle que $\forall x \in E$, $p(x) \leq M\|x\|$ que si de plus C est borné il existe $\alpha > 0$ telle que $\forall x \in E$, $p(x) \geq \alpha\|x\|$.
4) En déduire que p est continue.
On suppose que C est borné. Soit $\Phi(x) = \dfrac{p(x)}{\|x\|}.x$ pour tout $x \neq 0$ et $\Phi(0) = 0$.
5) Montrer que Φ est une bijection sur E et donner la fonction réciproque.
6) Montrer que Φ est bicontinue (continue et de réciproque continue). En déduire le résultat suivant.

Tout convexe ouvert borné d´un espace vectoriel normé est homéomorphe à la sphère unité.

Exercice 41. *Soit V un s.e.v. d´un espace de Hilbert H.*
1) Montrer que $\overline{V} \subset (V^\perp)^\perp$.
Soit P la projection orthogonale sur $\overline{V}$.
2) Montrer que pour tout $v \in (V^\perp)^\perp$ on a $((I-P)v, v) = 0$.
3) Déduire de ce qui précède que $\overline{V} = (V^\perp)^\perp$.

Exercice 42. *On note $C^0_\sharp$ l´espace des fonctions complexes sur $\mathbb{R}$, 2π -périodiques et*

$$L^2_\sharp = \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ u \textit{ mesurable et de carré intégrable sur } (-\pi,\pi), \\ \textit{tel que } u(x+2\pi) = u(x),\ x \textit{ p.p.}\}.$$

1) Donner des normes pour lesquels $C^0_\sharp$ est un Banach et $L^2_\sharp$ est un Hilbert.
On rappelle que $C^0_\sharp$ est dense dans $L^2_\sharp$.
2) En utilisant Stone Weierstrass montrer que la famille $\{e^{inx},\ n \in \mathbb{Z}\}$ est totale.
3) Montrer que $(e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base Hilbertienne de $L^2_\sharp$ pour le p.s.

$$(u, v) = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{u(x)}\, v(x)\, \frac{dx}{2\pi}.$$

4) Calculer les coordonnées a_n, $n \in \mathbb{Z}$ *de la fonction* $u \in L^2_\sharp$ *qui vaut* -1 *sur* $[-\pi, 0[$ *et* 1 *sur* $[0, \pi[$.
5) Déterminer quand la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, e^{inx}$ *est absolument convergente, semi-convergente, convergente dans* $L^2(-\pi,\pi)$.

Exercice 43. *Soit* a *une forme hermitienne continue coercive sur un espace de Hilbert* H. *Soit* $f \in H$. *On pose pour tout* $v \in H$, $J(v) = \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{2}a(v,v) - (f,v)\Big)$.
1) Montrer que $J(v)$ *peut être minoré indépendamment de* v.
2) Montrer que si $J(u) = \min\limits_{v\in H} J(v)$ *alors pour tout* v *on a* $a(u,v) = (f,v)$.
Indication : calculer $J(u \pm tv)$, $J(u \pm i\ tv)$ pour t proche de 0.
3) Réciproquement montrer que si u *résout pour tout* v, $a(u,v) = (f,v)$ *alors* $J(u) = \min\limits_{v\in H} J(v)$.

Exercice 44. *Soit* H *un Hilbert réel et* C *un convexe fermé, non vide de* H. *On note* P *la projection orthogonale sur* C.
1) Montrer que pour tout $x, y \in H$, *on a* $((x-y) - P(x) - P(y), P(x) - P(y)) \leq 0$.
2) En déduire que P *est une contraction.*
Soit a *une forme bilinéaire continue et coercive : il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $\forall u \in H,\ a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2$.
Soit l *une forme linéaire continue sur* H. *On cherche à résoudre l´inéquation variationnelle :*
Trouver $u \in C$ *tel que*

$$\forall v \in C, \quad a(u, v-u) \geq l(v-u)$$

3) Montrer que le problème peut se mettre sous la forme $u = P(\rho f - \rho A u + u)$ *où* $\rho > 0$, $f \in H$ *et* $A \in \mathcal{L}(H)$.
4) En déduire que l´inéquation variationnelle a une solution unique.
5) Si a *est symétrique montrer qu´elle définit un p.s., noté* $(.,.)_a$ *dont la norme est équivalente à la norme de départ. Montrer qu´il existe* $g \in H$ *tel que* $\forall v \in H$, $l(v) = a(g,v)$. *Quel est la projection* $P_a(f)$ *de* f *sur* C *pour ce nouveau p.s. ? Que minimise* u *?*
Application
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, *on cherche à résoudre le problème d´obstacle :*
Trouver une fonction $u \in L^2(\mathbb{R})$ *positive ou nulle telle que*

$$\int_{\mathbb{R}} u^2(x) + (u(x+1) - u(x))^2 \ - f(x)u(x)\, dx$$

soit minimum. Montrer que ce problème à une solution unique.

Chapitre 6

Eléments de théorie spectrale

6.1 Généralités

On commence par quelques définitions et des rappels sur des théorèmes de la dimension finie.

Définition 30. *Soit E, F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $A \in \mathcal{L}(E;F)$ on définit son image* $\mathrm{Im}(A)$ *et son noyau* $\mathrm{N}(A)$ *par*

$$\mathrm{Im}(A) = A(E) \subset F, \qquad \mathrm{N}(A) = A^{-1}(\{0\}) \subset E.$$

Une des bases de l´algèbre linéaire en dimension finie est le théorème élémentaire suivant.

Théorème 14. *(Théorème du rang.) Soit E, F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{L}(E;F)$. On suppose que E est de dimension finie, alors*

$$\dim(\mathrm{Im}(A)) + \dim(\mathrm{N}(A)) = \dim(E).$$

En effet comme E est de dimension finie il existe un supplémentaire $V \subset E$ à $\mathrm{N}(A)$. On a $\dim(V) + \dim(\mathrm{N}(A)) = \dim(E)$. On vérifie alors que A est une bijection et donc un isomorphisme d´espace vectoriel entre V et $\mathrm{Im}(A)$. On a donc $\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(A))$. On en déduit le résultat.

Corollaire 5. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie et $A \in \mathcal{L}(E)(:= \mathcal{L}(E;E))$. On a alors l´équivalence entre les trois proposition suivante :*

$$\begin{aligned} &\bullet \quad A \text{ est bijectif,} \\ &\bullet\bullet A \text{ est injectif,} \quad \mathrm{N}(A) = \{0\}, \\ &\bullet\bullet\bullet A \text{ est surjectif,} \quad \mathrm{Im}(A) = E. \end{aligned}$$

Si on est dans ce cas alors on vérifie aisément que A^{-1} est une application linéaire et comme on est en dimension finie A^{-1} est continue. C´est faux en général en dimension finie.

Définition 31. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le groupe linéaire sur E, noté $\mathcal{G}L(E)$ est l´ensemble des applications $A \in \mathcal{L}(E)$ bijectives telles que $A^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. ($A^{-1}$ est continue.)*

Définition 32. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{L}(E)$.*
L´ensemble résolvant de A, $\mathrm{Res}(A) \subset \mathbb{K}$, *est l´ensemble des $\mu \in \mathbb{K}$ tels que : $(A - \mu Id) \in \mathcal{G}L(E)$.*

L´ensemble des valeurs propres, $\mathrm{Vp}(A) \subset \mathbb{K}$, *est l´ensemble des* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tels que* $(A - \lambda Id)$ *ne soit pas injectif :* $\exists x \in E,\ x \neq 0,\ Ax = \lambda x$.
Le spectre de A, $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{K}$, *est le complémentaire de l´ensemble résolvant :* $\mathrm{Sp}(A) = \mathbb{K} \setminus \mathrm{Res}(A)$.

On a toujours $\mathrm{Vp}(A) \subset \mathrm{Sp}(A)$. En dimension finie on peut démontrer le résultat suivant.

Corollaire 6. *Soit* E *un espace vectoriel normé sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *de dimension finie et* $A \in \mathcal{L}(E)$, *alors* $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Vp}(A)$.

Ce corollaire est une conséquence directe du corollaire 5 quand on l´applique à $(A - \lambda Id)$.
Ces résultats, (théorème du rang 14 et les corollaires 5, 6) sont à la base de l´analyse spectrale en dimension finie. Malheureusement ils sont en général **faux** en dimension infinie. On peut s´en convaincre en faisant l´exercice suivant.

Exercice 45. *On désigne par* B *l'espace de Banach des suites complexes*

$$a = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$$

sommables avec la norme $\|a\| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. *On définit les opérateurs* S *et* T *suivants :*

$$Sa = (0, a_1, a_2, ..., a_n, ...), \qquad Ta = (a_2, a_3, ..., a_{n+1}, ...).$$

1) Montrer que S *et* T *sont dans* $\mathcal{L}(B)$ *et calculer leurs normes.*
2) Etudier l'injectivité et la surjectivité de ces opérateurs.
3) Est ce qu'une application linéaire de B *dans* B *inversible à droite est inversible à gauche ?*
4) Déterminer les valeurs propres et le spectre de S *et* T.

On va maintenant établir des résultats qui seront valables en dimensions quelconques. Il faut pour cela être dans un espace complet.

Théorème 15. *Soit* E *un espace de* ***Banach*** *sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *alors* $\mathcal{GL}(E)$ *est un ouvert de* $\mathcal{L}(E)$. *Plus précisément si* $A \in \mathcal{GL}(E)$, *alors pour tout* $B \in \mathcal{L}(E)$ *avec* $\|B\|_{\mathcal{L}(E)} < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)}}$, *on a* $(A + B) \in \mathcal{GL}(E)$ *et*

$$(A + B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \ (A^{-1}B)^n \ A^{-1}.$$

Pour démontrer ce théorème, commençons par montrer que $(Id - C) \in \mathcal{GL}(E)$ pour $\|C\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$. Pour cela considérons la série $S = \sum_{n=0}^{\infty} C^n$. Comme $\|C^n\|_{\mathcal{L}(E)} \leq {\|C\|_{\mathcal{L}(E)}}^n$, cette série est normalement convergente. Or $\mathcal{L}(E)$ est un Banach, cf proposition 28, donc (proposition 30) la série est convergente et définit bien $S \in \mathcal{L}(E)$. Les sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^{N} C^n$ convergent donc vers S. Or on a

$$(Id - C) \ S_N = \sum_{n=0}^{N} C^n - \sum_{n=1}^{N+1} C^n = Id - C^{N+1},$$
$$(Id - C) \ S = Id - \lim_{N \to \infty} C^{N+1} = Id,$$

car $\|C^{N+1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq {\|C\|_{\mathcal{L}(E)}}^{N+1} \to 0$. Comme $S_N \ (Id - C) = (Id - C) \ S_N$ on a aussi $S \ (Id - C) = (Id - C) \ S = Id$. Cela montre que $(Id - C) \in \mathcal{GL}(E)$ d´inverse S.

On applique ensuite ce résultat avec $C = -A^{-1}\ B$ qui est de norme $\|C\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)}\|B\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$ par hypothèse. On en déduit que $(Id + A^{-1}\ B) \in \mathcal{G}L(E)$ avec

$$(Id + A^{-1}\ B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ (A^{-1}B)^n.$$

Donc $A + B = A(Id + A^{-1}\ B) \in \mathcal{G}L(E)$ avec $(A+B)^{-1} = (Id + A^{-1}\ B)^{-1}A^{-1}$. Cela termine la démonstration du théorème 15.

Théorème 16. *Soit E un espace de* ***Banach*** *sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $A \in \mathcal{L}(E)$. L´ensemble* $\mathrm{Res}(A)$ *est un ouvert de $\mathbb{K}$ et l´application*

$$\mu \in \mathrm{Res}(A) \mapsto (A - \mu\ Id)^{-1}$$

est analytique. Le spectre de A, $\mathrm{Sp}(A)$ *est un compact de $\mathbb{K}$ contenu dans la boule $\{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| \leq \|A\|_{\mathcal{L}(E)}\}$.*

Soit $\mu_0 \in \mathrm{Res}(A)$, on applique le théorème 15 précédent à $(A - \mu_0 Id)$. Pour $B \in \mathcal{L}(E)$ avec $\|B\|_{\mathcal{L}(E)} < 1/\|(A - \mu_0 Id)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)}$ on a $(A - \mu_0 Id + B) \in \mathcal{G}L(E)$. En prenant $B = (\mu_0 - \mu)Id$ on en déduit que $\mu \in \mathrm{Res}(A)$ pour $|\mu - \mu_0| < 1/\|(A - \mu_0 Id)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)}$ et que l´on a

$$(A - \mu Id)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ ((A - \mu_0 Id)^{-1}(\mu_0 - \mu)Id)^n\ (A - \mu_0 Id)^{-1}$$
$$(A - \mu Id)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(\mu - \mu_0)^n\ ((A - \mu_0 Id)^{-1})^{n+1}$$

Par conséquent $\mathrm{Res}(A)$ est ouvert et $(A - \mu Id)^{-1}$ est développable en série entière et donc analytique.

Il en résulte que le complémentaire de $\mathrm{Res}(A)$ qui est $\mathrm{Sp}(A)$, est fermé. Reste à montrer l´inclusion ou encore, (par passage au complémentaire,) que

$$\{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| > \|A\|_{\mathcal{L}(E)}\} \subset \mathrm{Res}(A).$$

On applique le théorème 15 à λId. On a $\lambda Id + B \in \mathcal{G}L(E)$ pour

$$\|B\|_{\mathcal{L}(E)} < \frac{1}{\|(\lambda Id)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)}} = |\lambda|.$$

On peut prendre $B = A$ si $|\lambda| > \|A\|_{\mathcal{L}(E)}$ ce qui montre l´inclusion.

6.2 Opérateurs compacts.

On a vu que des résultats fondamentaux d´algèbre linéaire de la dimension finie ne sont pas nécessairement vrais en dimension infinie. On peut y remédier en partie en utilisant la notion de compacité.

Proposition 51. *Soit E, F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{L}(E;F)$. On dit que A est un opérateur compact si et seulement si une des trois propositions équivalentes suivantes est vérifiée :*
• *toute image d´un borné de E est relativement compact dans F,*
•• *$A(B_E(0;1))$ est relativement compact dans F,*
• • • *de toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E on peut extraire une sous suite telle que $(Ax_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans F quand $k \to \infty$.*
L´ensemble des opérateurs compacts est noté $\mathcal{K}(E;F)$.

On a évidement • implique ••.

Si on suppose ••, considérons une suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $M > 0$ de E. On a $A(\frac{x_n}{M}) \in A(B_E(0;1))$. Comme la compacité est équivalent à la compacité séquentielle dans les métriques (théorème 3), on obtient l´existence d´une sous suite telle que $A(\frac{x_{n_k}}{M}) \to y \in F$. On a bien $Ax_{n_k} \to My$, ce qui donne • • •.

L´implication : • • • donne •, résulte de l´équivalence entre la compacité et la compacité séquentielle dans les métriques (théorème 3).

Proposition 52. *Soit E, F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{L}(E;F)$. Si A est de rang fini,* $\dim(\mathrm{Im}(A)) < \infty$*, alors $A \in \mathcal{K}(E;F)$.*

En effet si $C \subset E$ est borné, $A(C)$ est un borné de $\mathrm{Im}(A)$ espace vectoriel de diemsion finie. Or en dimension finie les fermés bornés sont compact, $A(C)$ est donc relativement compact.

Il résulte de cette proposition que si $\dim E < \infty$ alors $\mathcal{L}(E;F) = \mathcal{K}(E;F)$. C´est faux en général. En effet Id_E est compact si et seulement si $B_E(0;1)$ est relativement compact si et seulement si $\dim E < \infty$ par le théorème 4 de Riesz. On a donc $\mathcal{K}(E)(= \mathcal{K}(E;E)) \neq \mathcal{L}(E)$ quand $\dim E = \infty$.

Proposition 53. *Soit E, F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les opérateurs compacts, $\mathcal{K}(E;F)$, forment un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E;F)$. Si de plus F est un Banach, $\mathcal{K}(E;F)$ est fermé dans $\mathcal{L}(E;F)$.*

Soit $A, B \in \mathcal{K}(E;F)$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. On va utiliser le critère •• de la proposition 51. Soit donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de E. Comme A est compact, il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissant telle que $Ax_{\varphi(n)} \to y \in F$. Comme B est compact, on peut à nouveau extraire une sous suite $(x_{\psi(\varphi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissant telle que $Bx_{\psi(\varphi(n))} \to z \in F$. Pour $\phi = \psi \circ \varphi$, on a donc $(\lambda A + B)(x_{\phi(n)}) \to \lambda y + z \in F$. Par conséquent $(\lambda A + B) \in \mathcal{K}(E;F)$, $\mathcal{K}(E;F)$ est bien un sous espace vectoriel.

Soit une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{K}(E;F)$, on suppose que $A_n \to A \in \mathcal{L}(E;F)$. On doit montrer que $\overline{A(B_E(0;1))}$ est compact. Comme cet ensemble est un fermé d´un espace complet il est complet (proposition 9). D´après le théorème 3 il suffit donc de montrer la précompacité. Soit $\varepsilon > 0$, on choisit n pour que $\|A - A_n\|_{\mathcal{L}(E;F)} \le \varepsilon/2$. Pour ce n, $\overline{A_n(B_E(0;1))}$ est compact et donc précompact. Par conséquent il existe $y_1, y_2, ..., y_K$ dans F tels que $\overline{A_n(B_E(0;1))} \subset \cup_{k=0}^K B_F(y_k;\varepsilon/2)$. Soit $y \in A(B_E(0;1))$, il existe $x \in B_E(0;1)$ tel que $y = Ax$ et il existe $k \in \{1, 2, ..., K\}$ tel que $A_n x \in B_F(y_k;\varepsilon/2)$. On a

$$\|y - y_k\| \le \|Ax - A_n x\| + \|A_n x - y_k\| \le \|A - A_n\|_{\mathcal{L}(E;F)} \|x\| + \varepsilon/2 \le \varepsilon.$$

Cela montre que $A(B_E(0;1)) \subset \cup_{k=0}^K B_F(y_k;\varepsilon)$ et par conséquent

$$\overline{A_n(B_E(0;1))} \subset \cup_{k=0}^K B_F(y_k;\varepsilon),$$

ce dernier ensemble étant fermé (union finie de fermés). On a ainsi terminé la démonstration de la proposition 53.

On termine cette section avec un résultat sur la composition avec un opérateur compact.

Proposition 54. *Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in \mathcal{L}(E;F)$ et $B \in \mathcal{L}(F;G)$.*
Si A ou B est compact alors $B \circ A \in \mathcal{K}(E;G)$.

Si B est compact, alors pour tout borné $H \subset G$, $\overline{B(H)}$ est compact. Or l´image d´un compact par une application continue est compacte, cf proposition 13, donc $A(\overline{B(H)})$ est compact. Par conséquent $A \circ B(H) \subset A(\overline{B(H)})$ est relativement compact.

Si A est compact, alors pour tout borné $H \subset G$, $B(H)$ est aussi borné et donc $A \circ B(H))$ est relativement compact.

Exercice 46. *Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$.*
1) On désigne par T^* l'adjoint de T, montrer que $\|T^*\| = \|T\|$ et que $T^{**} = T$.
2) Montrer que $\mathrm{N}(T^*) = Im(T)^{\perp}$ puis que $\mathrm{N}(T^*)^{\perp} = \overline{Im(T)}$.
On suppose dorénavant que $\|T\| \leq 1$.
3) Soit x tel que $x = Tx$, prouver que $\|T^*x\| = \|x\|$ puis en déduire que l'on a aussi $x = T^*x$.
4) Démontrer que $H = \mathrm{N}(I-T) \oplus^{\perp} \overline{Im(I-T)}$.
On pose $R_n(x) = \dfrac{1}{n+1}(x + Tx + ... + T^n x)$.
5) Si $x \in Im(I-T)$ montrer que $\|R_n(x)\| \leq \frac{C}{n+1}$ où $C > 0$ dépend de x mais pas de n. Que vaut $R_n(x)$ si $x \in \mathrm{N}(I-T)$?
6) Montrer que pour tout $x \in H$, $R_n(x) \to Px$ quand $n \to \infty$ où P est la projection orthogonale sur $\mathrm{N}(I-T)$.

Exercice 47. *On désigne par B l'espace de Banach des suites complexes*

$$a = (a_1, a_2, ..., a_n, ...), \qquad a_n \in \mathbb{C}$$

sommables muni de la norme $\|a\| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Soit $u = (u_1, u_2, ..., u_n, ...)$ une suite bornée. On pose pour $a \in B$, $Ua = (a_1u_1, a_2u_2, ..., a_nu_n, ...)$.
1) Montrer que $U \in \mathcal{L}(B)$ et donner sa norme.
On pose $u^N = (u_1, u_2, ..., u_N, 0, 0, ...)$ et on lui associe l'opérateur U^N.
2) Montrer que $U^N \in \mathcal{K}(B)$. Calculer $\|U - U^N\|$.
3) On suppose que la suite u tend vers 0. En déduire que $U \in \mathcal{K}(B)$.

6.3 Théorie Hilbertienne de Riesz-Fredholm

Il s´agit de démontrer un théorème du rang en dimension infinie. L'hypothèse de dimension finie va être remplacée par une hypothèse de compacité. Des résultats identiques sont valables dans le cadre des espaces de Banach. Les démonstration étant alors plus longue, on a préféré se restreindre au cas Hilbertien.

On a vu précédemment que tout opérateur de rang fini est compact. On a la réciproque suivante dans les espaces de Hilbert.

Proposition 55. *Soit H un espace de Hilbert et $K \in \mathcal{K}(H)$ alors il existe une suite $K_N \in \mathcal{L}(H)$ d´opérateurs de rang fini, $\dim(\mathrm{Im}(K_N)) < \infty$, qui ont pour limite K, $K_N \to K$ dans $\mathcal{L}(H)$.*

Attention, cette propriété est fausse dans le cadre général des Banach.

Soit B_H la boule unité de H, comme K est compact pour tout N il existe $(y_1, y_2, ..., y_P)$ dans H tel que $K(B_H) \subset \cup_{p=1}^{P} B_H(y_p; 1/N)$. Soit P_N la projection orthogonale sur le sous espace de dimension finie $\mathrm{Vect}(y_1, y_2, ..., y_P)$. $K_N = P_N \circ K$ est bien de rang fini. Soit $x \in B_H$, il existe $p \in \{1, 2, ..., P\}$ tel que $\|Kx - y_p\| \leq 1/N$. On a donc aussi ($\|P_N\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$, corollaire 2), $\|P_N Kx - P_N y_p\| = \|K_N x - y_p\| \leq 1/N$. Par conséquent $\|Kx - K_N x\| \leq \|Kx - y_p\| + \|y_p - K_N x\| \leq 2/N$. On a ainsi $\|K - K_N\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 2/N \to 0$ ce qui conclut la démonstration.

Proposition 56. *Soit H un espace de Hilbert et $K \in \mathcal{K}(H)$ alors l´opérateur adjoint est compact, $K^* \in \mathcal{K}(H)$.*

Soit K_N une suite d´opérateur de rang fini approchant K. Sur $V_N = \mathrm{N}(K_N)^{\perp}$, K_N est injectif de V_N sur $\mathrm{Im}(K_N)$. Soit P_N la projection orthogonale sur $\mathrm{N}(K_N)$ (qui est bien fermé). Si $y \in \mathrm{Im}(K_N)$ il existe $x \in H$ tel que $y = K_N x$. On a aussi $y = K_N(x - P_N x)$ et $x - P_N x \in V_N$, donc K_N est surjectif et par conséquent bijectif de V_N sur $\mathrm{Im}(K_N)$. Par conséquent V_N et $\mathrm{Im}(K_N)$ ont même dimension finie.

Soit maintenant $y \in \mathrm{Im}(K_N^*)$ et $x \in \mathrm{N}(K_N)$, il exite $z \in H$ tel que $y = K_N^* z$ donc $(y, x) = (K_N^* z, x) = (z, K_N x) = 0$. On a donc $\mathrm{Im}(K_N^*) \subset \mathrm{N}(K_N)^\perp = V_N$, qui est de dimension finie. Comme on a $\|K^* - K_N^*\|_{\mathcal{L}(H)} = \|K - K_N\|_{\mathcal{L}(H)}$, (un opérateur et son adjoit ont même norme, cf proposition 49), K^* est limite d'une suite d´opérateurs compacts (car de rang fini). Il est donc lui aussi compact, cf proposition 53.

Théorème 17. *(Alternative de Fredholm) Soit H un espace de Hilbert et $K \in \mathcal{K}(H)$. On a alors :*
a) $\mathrm{N}(Id - K)$ *est de dimension finie,*
b) $\mathrm{Im}(Id - K) = \mathrm{N}(Id - K^*)^\perp$ *est fermé,*
c) $\mathrm{Im}(Id - K)$ *est de co-dimension finie et* $\mathrm{codim}(\mathrm{Im}(Id - K)) = \dim(\mathrm{N}(Id - K)$. *En particulier $Id - K$ est surjectif si et seulement si $Id - K$ est injectif.*

Pour montrer a) considérons la boule unité $B_{\mathrm{N}(Id-K)} = B_H(0; 1) \cap \mathrm{N}(Id - K)$ de $\mathrm{N}(Id - K)$. Si $x \in B_{\mathrm{N}(Id-K)}$ alors $\|x\| \leq 1$ et $x = Kx \in K(B_H(0; 1))$. Donc $B_{\mathrm{N}(Id-K)} \subset K(B_H(0; 1))$ et ce dernier ensemble est relativement compact car $K \in \mathcal{K}(H)$. Par conséquent $B_{\mathrm{N}(Id-K)}$ est relativement compact. D´après le théorème 4 de Riesz, $\mathrm{N}(Id - K)$ est donc de dimension finie.

Pour montrer b) on remarque que $x \in \mathrm{Im}(Id - K)^\perp$ si et seulement si $\forall y \in H$, $(x, (Id - K)y) = 0$, i.e. si et seulement si $\forall y \in H$, $((Id - K^*)x, y) = 0$, si et seulement si $x \in \mathrm{N}(Id - K^*)$. Donc $\mathrm{Im}(Id - K)^\perp = \mathrm{N}(Id - K^*)$. D´après la proposition 42, on a $\mathrm{Im}(Id - K)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(Id - K)}^\perp$ et d´après la proposition 46 $\overline{\mathrm{Im}(Id - K)}^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Im}(Id - K)}$. On a donc $\overline{\mathrm{Im}(Id - K)} = \mathrm{N}(Id - K^*)^\perp$.

Il reste à montrer que $\mathrm{Im}(Id - K)$ est fermé. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{Im}(Id - K)$ qui converge vers $v \in H$. Il existe $x_n \in H$ tel que $v_n = (Id - K)x_n$. Soit P_1 la projection orthogonale sur $\mathrm{N}(Id - K)$. Posons $u_n = x_n - P_1 x_n$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in \mathrm{N}(Id - K)^\perp, \qquad (Id - K)u_n = v_n \to v, \text{ as } n \to \infty.$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n´est pas bornée il existe une sous suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\|u_{n_k}\| \to \infty$. Comme K est compact, quitte à extraire de nouveau une sous suite on peut aussi supposer que $K(\frac{u_{n_k}}{\|u_{n_k}\|})$ converge. Or

$$\frac{u_{n_k}}{\|u_{n_k}\|} = \frac{v_{n_k}}{\|u_{n_k}\|} + K(\frac{u_{n_k}}{\|u_{n_k}\|}),$$

donc $\frac{u_{n_k}}{\|u_{n_k}\|})$ converge vers une limite u qui vérifie $u = Ku$, $u \in \mathrm{N}(I - K)$. Or la suite $\frac{u_{n_k}}{\|u_{n_k}\|})$ appartient au fermé $\mathrm{N}(Id - K)^\perp$ et est de norme 1 donc $u \in \mathrm{N}(Id - K)^\perp \cap \mathrm{N}(I - K) = \{0\}$ et $\|u\| = 1$ d´où la contradiction.

Par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et comme K est compact il existe une sous suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que Ku_{n_k} converge. Comme $u_{n_k} = v_{n_k} + Ku_{n_k}$, u_{n_k} cette suite converge vers un vecteur u et $u = v + Ku$. On a bien $v \in \mathrm{Im}(Id - K)$ ce qui montre que $\mathrm{Im}(Id - K)$ est fermé.

Pour montrer c) on commence par remarquer que K^* est aussi compact (proposition 56). Par a) on en déduit que $\mathrm{N}(I - K^*)$ est de dimension finie et par b) $H = \mathrm{Im}(Id - K) \oplus \mathrm{Im}(Id - K)^\perp = \mathrm{Im}(Id - K) \oplus\ N(I - K^*)$. La co-dimension de $\mathrm{Im}(Id - K)$ est donc la dimension de $\mathrm{N}(I - K^*)$ qui est finie. Il reste à montrer que $\dim(\mathrm{N}(Id - K)) = \dim(\mathrm{N}(Id - K^*))$.

Pour ce faire commençons par le cas où $(I - K)$ est surjectif.
Supposons que $(Id - K)$ ne soit pas injectif. On pose $V_0 = \{0\}$, $V_n = \mathrm{N}((Id - K)^n)$ pour $n \geq 1$. On a $V_1 \neq \{0\}$ et $V_n \subset V_{n+1}$. Montrons que $V_{n+1} \neq V_n$ par une récurrence sur n. On a bien $V_1 \neq V_0$. Supposons $V_n \neq V_{n-1}$, il existe $x_\in \in V_n \setminus V_{n-1}$, comme $(Id - K)$ est surjectif il existe $x_{n+1} \in H$ tel que $x_n = (Id - K)x_{n+1}$. Comme $x_\in \in V_n$ on a $(Id - K)^{n+1}x_{n+1} = (Id - K)^n x_n = 0$ et comme $x_n \notin V_{n-1}$, $(Id - K)^n x_{n+1} = (Id - K)^{n-1}x_n \neq 0$ on a $x_{n+1} \in V_{n+1} \setminus V_n$. Donc $V_{n+1} \neq V_n$.
On peut donc appliquer la proposition 45. Il existe une suite $(e_1, e_2, ..., e_n, ...)$ orthonormée telle que $e_n \in V_n \cap V_{n-1}^\perp$. On a pour $n > m$, $Ke_n - Ke_m = e_n - ((Id - K)e_n + Ke_m)$. Or $Ke_m \in V_m \subset V_{n-1}$ et $(Id - K)e_n \in V_{n-1}$ donc e_n et $(Id - K)e_n + Ke_m$ sont orthogonaux. Par Pyrhagore on obtient

$\|Ke_n - Ke_m\|^2 = \|e_n\|^2 + \|(Id-K)e_n + Ke_m\|^2$, $\|Ke_n - Ke_m\| \geq 1$. La suite $(Ke_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc sans point d´accumulation ce qui contredit le fait que K soit compact.
Par conséquent $(Id-K)$ surjectif implique que $(Id-K)$ est injectif.

Supposons maintenant que $\dim(\mathrm{N}(Id-K)) \geq \dim(\mathrm{N}(Id-K^*))$. Entre ces deux espaces de dimensions finies, il existe donc une application linéaire surjective $\Lambda : \mathrm{N}(Id-K) \to \mathrm{N}(Id-K^*)$. Si P_1 désigne toujours la projection orthogonale sur $N(Id-K)$, l´opérateur ΛP_1 est un opérateur de $\mathcal{K}(H)$ car de rang fini (proposition 52). Donc $K+\Lambda P_1$ est compact. Montrons que $Id-(K+\Lambda P_1)$ est surjectif. Soit $x \in H$, comme $H = \mathrm{N}(Id-K^*) \oplus \mathrm{N}(Id-K^*)^\perp = \mathrm{N}(Id-K^*) \oplus \mathrm{Im}(Id-K)$ par b) il existe $y \in \mathrm{N}(Id-K^*)$ et $z \in H$ tel que $x = y + (Id-K)z$. Comme Λ est surjectif il existe $t \in \mathrm{N}(Id-K)$ tel que $-y - \Lambda P_1 z = \Lambda t$. On a $(Id-K)t = 0$ et $P_1 t = t$ donc

$$(Id-(K+\Lambda P_1))(t+z) = (Id-K)(t+z) + \Lambda t + \Lambda P_1 z = (Id-K)z + y = x.$$

Par conséquent $(Id-(K+\Lambda P_1))$ est surjectif et d´après ce qui précède il est donc injectif. Soit $x \in \mathrm{N}(Id-K)$ tel que $\Lambda x = 0$. On a $(Id-(K+\Lambda P_1))x = (Id-K)x - \Lambda x = -\Lambda x = 0$ et donc $x = 0$. Λ est donc injectif. C´est donc une bijection de $\mathrm{N}(Id-K)$ sur $\mathrm{N}(Id-K^*)$. On a donc $\dim(N(Id-K)) = \dim(\mathrm{N}(Id-K^*))$.
Par conséquent on a nécessairement $\dim(\mathrm{N}(Id-K)) \leq \dim(\mathrm{N}(Id-K^*))$. Comme K^* est compact (proposition 56). On peut lui appliquer ce résultat pour obtenir $\dim(\mathrm{N}(Id-K^*)) \leq \dim(\mathrm{N}(Id-K^{**}))$. Or (proposition 49) $K^{**} = K$, on a donc égalité ce qui termine la démonstration.

Remarque 3. *On interprète l´égalité* $\mathrm{Im}(Id-K) = N(Id-K^*)^\perp$ *de la façon suivante. Soit* $(e_1, ..., e_N)$ *une base de* $N(Id-K^*)$ *et* $f \in H$. *Le problème :*

$$\textit{Trouver } u \in H \textit{ tel que }, \qquad u - Ku = f,$$

a des solutions si et seulement si f *vérifie* N *conditions de compatibilités :*

$$\forall i = 1, ..., N, \qquad (f, e_i) = 0.$$

C´est l´alternative de Fredholm :

- *ou le second membre vérifie* N *conditions de compatibilités et dans ce cas l´ensemble des solutions est un espace affine de dimension* N *de la forme* $\{u_0\} + \mathrm{N}(Id-K)$.
- *ou il n´y a aucune solution.*

On retrouve ainsi la situation de la dimension finie.

Proposition 57. *Soit* H *un espace de Hilbert et* $K \in \mathcal{K}(H)$. *Si* $Id-K$ *est injectif alors* $Id-K \in \mathcal{GL}(H)$.

La seule chose à vérifier en plus du théorème 17 est la continuité de $(Id-K)^{-1}$. Si cet opérateur n´était pas borné, il existerait une suite (x_n) bornée dans H telle que $\|y_n\| \to \infty$ avec $y_n = (Id-K)^{-1}x_n$. On aurait alors pour $z_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$,

$$\|z_n\| = 1, \qquad z_n - Kz_n = \frac{x_n}{\|y_n\|} \to 0.$$

Comme K est compact il existe z_{n_k} tel que Kz_{n_k} converge et avec l´équation ci dessus on obtient que z_{n_k} converge vers un $z \in H$ vérifiant $\|z\| = 1$ et $z - Kz = 0$. Cela contredit l´hypothèse $(Id-K)$ injectif. $(Id-K)^{-1}$ est donc borné et donc continu.

6.4 Spectre d'un opérateur compact.

L'alternative de Fredholm va nous permettre de décrire le spectre d'un opérateur compact.

Théorème 18. *Soit* H *un espace de Hilbert de dimension infinie et* $K \in \mathcal{K}(H)$, *alors*
i) $\quad 0 \in \mathrm{Sp}(K)$,

ii) $\quad \mathrm{Sp}(K) \setminus \{0\} = \mathrm{Vp}(K) \setminus \{0\}$,
iii) En dehors de 0 *le spectre est un ensemble de points isolés,*
ou bien c'est un ensemble fini,
ou bien c'est une suite tendant vers 0,

$$\mathrm{Sp}(K) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...\} \text{ avec } \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0.$$

Si $0 \notin \mathrm{Sp}(K)$, alors $K^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ existe et donc $Id = K \circ K^{-1}$ est compact par composition d'un opérateur et d'un opérateur continu, cf proposition 54. Par conséquent $\overline{B_H(0;1)}$ est compact et par le théorème 4 de Riesz la dimension est finie. La contrapposée donne le résultat.

Preuve de ii).
Pour $\lambda \neq 0$, on a $\lambda Id - K = \lambda(Id - \frac{1}{\lambda}K)$. Donc si $\lambda \notin \mathrm{Vp}(K)$ alors $Id - \frac{1}{\lambda}K$ est injectif et d'après la proposition 57 $Id - \frac{1}{\lambda}K \in \mathcal{GL}(H)$. Donc $\lambda Id - K \in \mathcal{GL}(H)$, $\lambda \in \mathrm{Res}(H)$. On obtient le résultat par passage au complémentaire.

Preuve de iii).
Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite convergente de $\mathrm{Sp}(K) \setminus \{0\}$, $\lambda_n \to \lambda$ et $\lambda_n \neq \lambda_m$ pour $n \neq m$. Il faut montrer que nécessairement $\lambda = 0$. D'après ii), λ_n est une valeur propre soit donc e_n, $\|e_n\| = 1$ un vecteur propre correspondant.

Montrons par récurrence que $(e_1, ...e_n)$ est un système libre. (e_1) est libre puisque $e_1 \neq 0$. Supposons $(e_1, ...e_n)$ libre, si $e_{n+1} = \sum_1^n \alpha_k e_k$ alors $Ke_{n+1} = \lambda_{n+1}e_{n+1} = \sum_1^n \alpha_k Ke_k$ et donc $\sum_1^n \alpha_k \lambda_{n+1} e_k = \sum_1^n \alpha_k \lambda_k e_k$. Comme $(e_1, ...e_n)$ est un système libre on a pour $k = 1, 2, ..., n$, $\alpha_k \lambda_k = \alpha_k \lambda_{n+1}$. On obtient donc puisque $\lambda_k \neq \lambda_{n+1}$, $\alpha_k = 0$ et par conséquent $e_{n+1} = 0$ ce qui contredit $\|e_{n+1}\| = 1$.

On note $V_n = \mathrm{Vect}(e_1, ...e_n)$. $V_1 \subset V_2 \subset ...V_n \subset ...$ est une suite croissante d'espace vectoriels de dimension n. Comme $(\lambda_n Id - K)e_n = 0$ on a $(\lambda_n Id - K)(V_n) \subset V_{n-1}$ et aussi $K(V_n) \subset V_n$. D'après la proposition 45, il existe un système $(u_1, ..., u_n, ...)$ orthonormé tel que $(u_1, ..., u_n)$ est une base de V_n. Pour $n \geq m - 1$ on a $Ku_n - Ku_m = \lambda_n u_n - ((\lambda_n Id - K)u_n + Ku_m)$. Comme $((\lambda_n Id - K)u_n + Ku_m) \in V_{n-1}$, Pythagore montre que $\|Ku_n - Ku_m\| \geq \|\lambda_n u_n\| = |\lambda_n|$. Or K est compact donc, au moins une sous suite $\|Ku_{n_k} - Ku_{m_k}\| \to 0$, et donc $\lambda_{n_k} \to 0$. Par conséquent $\lambda = 0$.

Par le théorème 16, on a $\mathrm{Sp}(K) \subset \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leq \|K\|_{\mathcal{L}(H)}\}$. Or pour tout $p \geq 1$, $D_p = \mathrm{Sp}(K) \cap \{\lambda \in \mathbb{C};\ \frac{1}{p}\|K\|_{\mathcal{L}(H)} \leq |\lambda| \leq \|K\|_{\mathcal{L}(H)}\}$ est un ensemble compact de points isolés, D_p est donc un ensemble fini. Comme $\mathrm{Sp}(K) \setminus \{0\} = \cup_1^\infty D_p$ cet ensemble est dénombrable, on peut donc l'écrire comme une suite de nombres complexes distincts $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...)$. Pour tout $p \geq 1$ soit N l'indice maximale des $\lambda_n \in D_p$ alors pour $n > N$ on a $|\lambda_n| < \frac{1}{p}\|K\|_{\mathcal{L}(H)}$. Cela montre que $\lambda_n \to 0$ et termine la démonstration.

On peut encore préciser les choses dans le cas où l´opérateur est hermitien. On rappelle que pour un opérateur hermitien A on a $\forall u \in H,\ (Au, u) \in \mathbb{R}$.

Proposition 58. *Soit* $A \in \mathcal{L}(H)$ *un opérateur hermitien d´un espace de Hilbert* H. *On pose*

$$m = \inf_{u\in H, u\neq 0} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2}, \qquad M = \sup_{u\in H, u\neq 0} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2},$$

on a alors $m,\ M\ \in \mathrm{Sp}(A)$ *et* $\mathrm{Sp}(A) \subset [m, M]$.

Commençons par montrer que le spectre de A est réel.
Soit donc $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\beta \neq 0$. Supposons $\beta > 0$, on pose pour tout $u, v \in H$, $a(u, v) = (-i(\lambda Id - A)u, v)$. a est une forme sesquilinéaire et on va montrer qu´elle est coercive. En effet $a(u, u) = \beta\|u\|^2 - i(\alpha\|u\|^2 - (Au, u))$ et donc $\mathrm{Re}a(u, u) = \beta\|u\|^2$. Soit $w \in H$, par le

théorème 13 de Lax Milgram il existe un unique $u \in H$ tel que

$$\forall v \in H, \qquad a(u,v) = (-iw, v).$$

Cette solution u vérifie $(\lambda Id - A)u = w$ et $\mathrm{Re}a(u,u) = \beta\|u\|^2 \leq |(-iw,u)| \leq \|w\|\ \|u\|$. Par conséquent $(\lambda Id - A)$ est inversible et d´inverse continu ($\|u\| = \|(\lambda Id - A)^{-1}w\| \leq \frac{1}{\beta}\|w\|$). On a donc $\lambda \in \mathrm{Res}(A)$.
De même si $\beta < 0$, en raisonnant cette fois sur $a(u,v) = (i(\lambda Id - A)u, v)$, on a aussi $\lambda \in \mathrm{Res}(A)$.

Il nous reste à étudier le cas où $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda < m$ on pose $a(u,v) = ((A - \lambda Id)u, v)$ et on remarque que $a(u,u) \geq (m - \lambda)\|u\|^2$ et donc a est coercive. En résolvant pour tout $v \in H$, $a(u,v) = (-w,v)$, on obtient comme précédemment que $\lambda \in \mathrm{Res}(A)$. Le même raisonnement avec cette fois $a(u,v) = ((\lambda Id - A)u, v)$ montre que $\lambda \in \mathrm{Res}(A)$ pour $\lambda > M$.

On vient donc de démontrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset [m, M]$, reste à montrer que m et M appartiennent au spectre. Posons $a(u,v) = ((MId - A)u, v)$, a est une forme hermitienne et positive donc par Cauchy-Schwarz on a $|a(u,v)| \leq \sqrt{a(u,u)}\sqrt{a(v,v)}$. En choisissant $v = (MId - A)u$ on obtient donc

$$\begin{aligned} a(u,v) = \|(MId - A)u\|^2 &\leq \sqrt{a(u,u)}\sqrt{a(v,v)} \leq \sqrt{a(u,u)}C\|v\| = C\sqrt{a(u,u)}\|(MId - A)u\| \\ \|(MId - A)u\|^2 &\leq C^2 a(u,u) = C^2(M\|u\|^2 - (Au,u)) \end{aligned}$$

Soit maintenant une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ tel que $\|u_n\| = 1$ et $(Au_n, u_n) \to M$. En utilisant l´inégalité ci-dessus on obtient

$$\|(MId - A)u_n\|^2 \leq C^2(M\|u_n\|^2 - (Au_n, u_n)) \to 0.$$

Si $M \in Res(A)$ on aurait avec $v_n = (MId - A)u_n$, $v_n \to 0$ et $u_n = (MId - A)^{-1}v_n$ étant de norme 1 ne peut tendre vers 0. Cela contredit la continuité de $(MId - A)^{-1}$. Par conséquent $M \in \mathrm{Sp}(A)$. On obtient le même résultat pour m en considérant cette fois $a(u,v) = ((A - mId)u, v)$. Cela termine la démonstration.

On a le corollaire suivant

Corollaire 7. *Soit A un opérateur hermitien sur un espace de Hilbert H. Si* $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ *alors* $A = 0$.

En effet on a alors $m = M = 0$ donc pour tout $u \in H$, $(Au,u) = 0$. Or pour tout $u, v \in H$ on a $\mathrm{Re}(Au,v) = \frac{1}{4}\Big((A(u+v), u+v)) - (A(u-v), u-v)\Big) = 0$. De même $\mathrm{Im}(Au,v) = \mathrm{Re}(Au, -iv) = 0$ donc $(Au,v) = 0$ ce qui montre que $Au = 0$.

On termine avec le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 19. *Soit H un espace de Hilbert séparable et A un opérateur hermitien compact de $\mathcal{L}(H)$. Il existe alors une base hilbertienne de vecteurs propres de A*

Autrement dit, A est diagonalisable dans une base hilbertienne.
On démontre maintenant le théorème. Comme A est compact son spectre est constitué de 0 et d´une suite finie ou non de valeurs propres non nulles $\{\lambda_1, ..., \lambda_n, ...\}$. Comme A est hermitien ces valeurs propres sont réelles. Posons $E_n = \mathrm{N}(A - \lambda_n I)d$, $E_0 = \mathrm{N}(A)$, $\lambda_0 = 0$. (Par le théorème de Fredholm 17, E_n est de dimension finie pour $n \geq 1$.) Soit maintenant $m \neq n$ et $u_n \in E_n$, $v_n \in E_n$, on a $(Au_n, v_n) - (u_n, Av_n) = 0$ car A est hermitien. Comme u_n et v_n sont des vecteurs propres et que les valeurs propres sont réelles on obtient $(\lambda_n - \lambda_m)(u_n, v_m) = 0$, $(u_n, v_m) = 0$. Les espaces E_n sont donc deux à deux orthogonaux. On pose alors $F = \oplus^{\perp}_{n=0,1,2,...}E_n$.

On va montrer que F est dense dans H. Tout d´abord on remarque que si $u \in F^{\perp}$on a $\forall v \in F$, $Av \in F$ et donc $(u, Av) = 0$. Comme A est hermitien $(Au, v) = (u, Av) = 0$. Par conséquent $Au \in F^{\perp}$. Soit B la restriction de A à $F^{\perp}$, d´après ce qui précède B est un opérateur de $F^{\perp}$ dans $F^{\perp}$. Comme $F^{\perp}$ est fermé c´est un Hilbert et B est un opérateur compact qui est sans valeur propre. D´après le théorème de décomposition spectrale 18, on a $\mathrm{Sp}(B) = \{0\}$. Or B est aussi hermitien donc par le corollaire 7 $B = 0$. Comme B est sans valeur propre cela implique que $F^{\perp} = \{0\}$ et donc F est bien dense.

L´espace $E_0 = \mathrm{N}(A)$ est fermé, c´est donc un espace de Hilbert. Il est aussi séparable (Proposition 10) et a donc une base Hilbertienne. On complète cette base par les bases orthonormés des E_n, $n \geq 1$ qui sont de dimensions finies. Le système $\mathcal{B}$ obtenu est orthonormé par construction et formé de vecteurs propres de A. Il ne reste plus qu´à montrer qu´il est total. Si $u \in \mathcal{B}^{\perp}$ alors toujours par construction pour tout $n \geq 0$, $u \in E_n^{\perp}$ et donc $u \in F^{\perp} = \{0\}$, $u = 0$, ce qu´il fallait démontrer.

6.5 Exercices

Exercice 48. *On désigne par B l'espace de Banach des suites complexes $a = (a_1, ..., a_n, ...)$ sommables avec la norme $\|a\| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Soit $u = (u_1, u_2, ..., u_n, ...)$ une suite bornée. On pose pour $a \in B$, $Ua = (a_1u_1, a_2u_2, ..., a_nu_n, ...)$.*
1) Montrer que $U \in \mathcal{L}(B)$ et donner sa norme.
On pose $u^N = (u_1, u_2, ..., u_N, 0, 0, ...)$ et on lui associe l'opérateur U^N.
2) Montrer que $U^N \in \mathcal{K}(B)$. Calculer $\|U - U^N\|$.
On suppose dorénavant que u_n tend vers 0 quand $n \to +\infty$.
3) En déduire que $U \in \mathcal{K}(B)$.
4) Déterminer $\mathrm{Sp}(K)$.
5) Pour $b \in B$, à quelles conditions peut-on résoudre $(\lambda Id - U)a = b$?

Exercice 49. *Soit $k \in C^0([0,1]^2; \mathbb{R})$. Pour $f \in L^2(0,1)$ on pose*

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x, y)\, f(y)\, dy.$$

1) Montrer que Kf définit une fonction de $C^0([0,1]; \mathbb{R})$.
On note $\mathcal{E} = \{Kf / \|f\|_{L^2(0,1)} \leq 1\}$.
2) Montrer que cette ensemble est équicontinu.
3) En déduire que $K \in \mathcal{K}(L^2(0,1))$ et calculer son adjoint.
4) Pour $f \in C^0([0,1]; \mathbb{R})$ résoudre le problème de Sturm-Liouville :

$$\forall x \in [0,1],\ \frac{d^2}{dx^2} g(x) = f(x), \qquad g(0) = g(1) = 0.$$

5) Montrer que g se met sous la forme $g = Kf$ pour un noyau k convenablement choisi.
6) Montrer que K est autoadjoint. Déterminer les valeurs propres de K.
7) Trouver une base hilbertienne qui diagonalise K.