Quelques résultats *de base* en Analyse fonctionnelle

On donne ici sans démonstration un concentré des principaux résultats démontrés dans un cours : "Analyse fonctionnelle pour la Licence" donné en Licence de Mathématiques à l´Université de Nice-Sophia Antipolis il y a quelques années par Frédéric Poupaud.

Pour l'essentiel, les quatre premiers chapitres de ce bref résumé rassemblent donc une bonne partie des résultats ***de base*** de Topologie générale (espaces métriques, ici) et d'Analyse fonctionnelle qu'on n'enseigne plus ou qu'on ne voit plus en détail en Licence, qu'on ne traite pas non plus en détail en Master 1, sous prétexte que "c'est du niveau Licence" (!), mais qu'évidemment les étudiants de Master 1 sont supposés connaître ... et qu'ils peuvent être amenés à utiliser dans différentes UE de Master 1, sans parler des bases nécessaires pour l'Agrégation ou en Master 2...

Les Chapitres 5 : Espaces de Hilbert, brièvement résumé ici, et 6 : Théorie spectrale, qu'on ne résume pas ici, seront par contre traités en détail en cours dans l'UE : Analyse Approfondie.

Pour plus de précisions sur ces résultats, leurs démonstrations etc... voir le texte complet du cours de F. Poupaud sur
http ://math.unice.fr/ rascle/indexanapp.html/ana-fonc.pdf

Pour des résultats plus spécialisés, on renvoie aussi en particulier à

H. Brezis. - ANALYSE FONCTIONNELLE : THÉORIE ET APPLICATIONS. Paris : Masson, 1983. - (Mathematiques Appliquées pour la Maitrise.)

Espaces métriques

Théorème 1. *Soient* (E, d_E) *et* (F, d_F) *deux espaces métriques. Soit* D *un sous ensemble dense de* E *et* $f : D \to F$. *Si*
- F *est complet,*
- f *est uniformément continue sur* D,

alors il existe un unique prolongement continu $\tilde{f}$ *de* f *à* E *tout entier et ce prolongement est uniformément continu.*

Théorème 2. *(Théorème de Picard) Soient* (E, d) *un espace métrique complet. Soit* $f : E \to E$ *une application strictement contractante, c´est à dire qu´il existe une constante* $k \in]0, 1[$ *telle que :*

$$\forall x,\ y \in E, \qquad d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y).$$

Alors f *a un unique point fixe, c´est à dire qu´il existe un unique* $a \in E$ *tel que* $a = f(a)$. *De plus toute suite récurrente,* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifiant* $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = f(a_n)$, *converge vers* a *et* $d(a_n, a) \leq k^n\, d(a_0, a)$.

Définition 1. *Un espace métrique* (E, d) *est compact si de tout recouvrement de* E *par des ouverts on peut extraire un recouvrement fini. Autrement dit si* $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ *est tel que* $E = \cup_{O\in\mathcal{S}} O$ *alors il existe* $n \in \mathbb{N}$ *et* O_1, O_2,...O_n *des ouverts de* $\mathcal{S}$ *tels que* $E = O_1 \cup O_2 ... \cup O_n$.
L´espace est dit séquentiellement compact si de toutes suites on peut extraire une suite qui converge dans E.
L´espace est précompact si pour tout $\varepsilon > 0$ *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x_1,\ x_2, ...x_n$, n *points de* E *tel que* $E = B(x_1; \varepsilon) \cup B(x_2; \varepsilon) ... \cup B(x_n; \varepsilon)$

Théorème 3. *Soit* (E, d) *un espace métrique. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.*
• (E, d) *est compact.*
•• (E, d) *est séquentiellement compact.*
••• (E, d) *est précompact et complet.*

Définition 2. *Soit* (E, d) *un espace métrique, on dit qu'il est séparable si et seulement si il existe un sous ensemble dense dénombrable.*

Proposition 1. *Un espace métrique compact* (E, d) *est séparable.*

Définition 3. *Soit* $X \subset E$ *une partie d´un espace métrique* (E, d). *On dit que* X *est relativement compact si sa fermeture* $\overline{X}$ *est compacte pour la distance induite* d.

Proposition 2. *Soit* (E, d_E) *et* (F, d_F) *deux espaces métriques et* $f : E \mapsto F$ *une fonction continue. Alors si* E *est compact* $f(E)$ *est un compact de* F.

Proposition 3. *Soit* (E, d) *un espace métrique compact. Soit* $f : E \to \mathbb{R}$ *une fonction réelle continue. Alors il existe* $a,\ b \in E$ *tel que* $\forall x \in E$ *on a* $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.

Proposition 4. *Soit* (E, d) *un espace métrique. Si* E *est compact alors il est borné : il existe* $M > 0$ *tel que* $\forall x,\ y \in E$, $d(x, y) \leq M$.

Proposition 5. *Soit* (E, d_E) *et* (F, d_F) *deux espaces métriques. Soit* $f \in C(E; F)$ *une fonction continue, alors si* E *est compact,* f *est uniformément continue.*

Espaces vectoriels normés

Théorème 4. *(Riesz) La boule unité fermée $B_f(0;1)$ d´un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

Théorème 5. *Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $\Phi : E \mapsto F$ une application linéaire. Les proposition suivantes sont alors équivalentes :*
- Φ *est continue en* 0,
- •• Φ *est uniformément continue sur* E,
- ••• Φ *est bornée : il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in E$, $\|\Phi(x)\|_F \leq M \ \|x\|_E$.*

Proposition 6. *Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}(E;F)$ l´ensemble des applications linéaire continue de E dans F. Pour $\Phi \in \mathcal{L}(E;F)$ on a :*

$$\sup_{x\in E,\ \|x\|_E=1} \|\Phi(x)\|_F = \sup_{x\in E,\ \|x\|_E\leq 1} \|\Phi(x)\|_F = \sup_{x\in E,\ x\neq 0} \frac{\|\Phi(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Ce nombre noté $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(E;F)}$ défini une norme sur $\mathcal{L}(E;F)$ qui est ainsi un espace vectoriel normé.

Proposition 7. *Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés. Alors si $\Phi \in \mathcal{L}(E;F)$ et $\Psi \in \mathcal{L}(F;G)$, on a $\Psi \circ \Phi \in \mathcal{L}(E;G)$ et*

$$\|\Psi \circ \Phi\|_{\mathcal{L}(E;G)} \leq \|\Phi\|_{\mathcal{L}(E;F)} \, \|\Psi\|_{\mathcal{L}(F;G)}.$$

Proposition 8. *Les hyperplans H d´espace vectoriel E sont les noyaux des formes linéaires non nulles. Si E est normé et $H = \mathrm{N}(l)$ alors l est continue si et seulement si H est fermé.*

Théorème 6. *(Hahn Banach) Soit E un espace vectoriel normé et V un sous espace vectoriel de E. Si m est une forme linéaire continue sur V pour la norme induite, alors il existe un prolongement $l \in E'$ de m non nécessairement unique de même norme :*

$$\forall v \in V,\ m(v) = l(v), \qquad \|l\|_{E'} = \|m\|_{V'}.$$

Proposition 9. *Soit E un espace vectoriel normé et $x \in E$. Si pour tout $l \in E'$ on a $l(x) = 0$, alors $x = 0$.*

Espaces de Banach

Proposition 10. *Soit E un espace vectoriel normé et B un Banach alors $\mathcal{L}(E; B)$ est aussi un espace de Banach pour la norme des applications linéaires.*

Proposition 11. *Soit E un espace vectoriel normé et V un sous espace vectoriel dense de E. Soit B un Banach, alors toute application linéaire continue $u : V \to B$ a un prolongement unique en une application $\tilde{u} \in \mathcal{L}(E; B)$.*

Définition 4. *Soit E un espace vectoriel normé, une série de terme général $x_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$ est dite normalement convergente si et seulement si la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_E$ est convergente.*

Proposition 12. *Dans un Banach, les séries normalement convergentes sont des séries convergentes.*

Intégrale (de Riemann) des fonctions à valeurs dans les Banach

Définition 5. *Une subdivision h de $[a, b]$ est la donnée d´un N-uple, $N \geq 2$, $t_1 = a < t_2 < ... < t_N = b$. On pose $|h| = \max_{n=1,...N-1} t_{n+1} - t_n$.*

Proposition 13. *Soit $a < b$ deux réels, B un espace de Banach et $f \in C([a, b]; B)$. Pour $h = (t_1, ...t_N)$ une subdivision de $[a, b]$, on pose $I_h(f) = \sum_{n=1}^{N-1} (t_{n+1} - t_n) f(t_n)$. Il existe alors $I(f) \in B$ tel que $I_h(f) \to I(f)$ quand $|h| \to 0$. $I(f)$ est par définition l´intégrale de f sur $[a, b]$, notée : $\int_a^b f(t)\ dt = I$. On pose $\int_b^a f(t)\ dt = -\ \int_a^b f(t)\ dt =$. On a*

$$\left\| \int_a^b f(t)\ dt \right\|_B \leq |b - a| \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|_B$$

$$\forall c \in [a, b], \quad \int_a^b f(t)\ dt = \int_a^c f(t)\ dt + \int_c^b f(t)\ dt.$$

I est une application linéaire continue de $C^0([a, b]; B)$, muni de la norme $|||f||| = \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|_B$, à valeurs dans B.

Lien entre primitives et intégrales : si J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé, $f : J \to E$ est dérivable en un point $t \in J$ si et seulement si $\dfrac{f(t+h) - f(t)}{h}$ a une limite dans E pour $t + h \in J$ et $h \to 0$. Cette limite est notée $f'(t)$. De même on dit $f \in C^1(J; E)$ si f est dérivable en tout point de J et si $t \in J \to f'(t) \in E$ est une fonction continue.

Proposition 14. *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé. Soit $f : J \to E$ une fonction dérivable en tout point de dérivée nulle, alors f est constante.*

Proposition 15. *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et B un espace de Banach. Soit $f \in C(J; B)$ alors les primitives de f sont les fonctions $F \in C^1(J; B)$ de la forme :*

$$F(t) \ = \ x + \int_a^t f(s)\ ds,$$

où $x \in B$, $a \in J$ sont arbitraires. Pour tout x et tout a, t, F est dérivable au point t et $F'(t) = f(t)$.

Théorème 7. *(Cauchy-Lipschitz) Soit B un espace de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et J un intervalle de $\mathbb{R}$. On se donne une fonction, $F : J \times B \to B$, continue et globalement Lipschitz par rapport à sa seconde variable :*

$$\exists L > 0, \quad \forall t \in J, \, \forall x, y \in B, \quad \|F(t,x) - F(t,y)\|_B \leq L \, \|x - y\|_B.$$

Pour tout $t_0 \in J$ et tout $x_0 \in B$ il existe une unique solution $\varphi \in C^1(J; B)$ à l´équation différentielle $y' = F(t, y)$ qui vérifie $\varphi(t_0) = x_0$.

Espaces de fonctions continues

Définition 6. *Soit E et F deux espaces métriques, alors $C^0(E;F) = C(E;F)$ désigne l´ensemble des fonctions continues de E dans F. On dit qu'une fonction f est bornée si l'ensemble $f(E)$ est borné : $\sup_{x,y\in E} d_F(f(x), f(y)) < \infty$. Le sous ensemble des fonctions f continues et bornées est noté $C_b^0(E;F)$ ou encore $C_b(E;F)$.*

Proposition 16. *Soit E un espace métrique et F un espace métrique complet alors l´espace $C_b(E;F)$ est aussi un métrique complet pour la distance de la convergence uniforme $d_\infty := sup(d_F(f(x), f(y)))$. Si B est un espace de Banach alors $C_b(E;B)$ est un espace de Banach pour la norme du sup : pour $f \in C_b(D;B)$, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in D} \|f(x)\|_B$.*

Définition 7. *Un ensemble $\mathcal{A}$ de fonctions réelles ou complexes sur un ensemble D est une algèbre sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ si et seulement si c´est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et si $\forall f,\ g \in \mathcal{A}$, la fonction $fg : x \in D \mapsto f(x)\ g(x)$, appartient aussi à $\mathcal{A}$.*

Théorème 8. *(Stone-Weierstrass) Soit D un espace métrique compact et $\mathcal{A}$ une sous algèbre de $C(D;\mathbb{R})$. Si*
• La fonction constante égale à 1 appartient à $\mathcal{A}$,
•• $\mathcal{A}$ est séparante, c´est à dire $\forall x,\ y \in D$ il existe $f \in \mathcal{A}$ tel que $f(x) \neq f(y)$
alors l´algèbre $\mathcal{A}$ est dense dans $C(D;\mathbb{R})$.

Corollaire 1. *Soit K un fermé borné de $\mathbb{R}^N$ alors $\mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$, l´ensemble des polynômes à N variables, est dense dans $C(K;\mathbb{R})$.*
On note $C_{per,L}(\mathbb{R})$ l´ensemble des fonctions réelles continues de période $L > 0$. Alors l´ensemble des polynômes trigonométriques

$$\mathcal{T} = \{p : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \ / \ p(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \ \cos(\frac{2\pi n x}{L}) + b_n \ \sin(\frac{2\pi n x}{L}),\ a_n \in \mathbb{R},\ b_n \in \mathbb{R}\}$$

est dense dans $C_{per,L}(\mathbb{R})$ pour la norme du sup.

Définition 8. *Soit E et F deux espaces métriques et $\mathcal{F} \subset C^0(E;F)$, une famille de fonctions. La famille $\mathcal{F}$ est équicontinue en un point $x_0 \in E$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$ et tout $x \in E$ vérifiant $d_E(x, x_0) \leq \eta$ on a $d_F(f(x), f(x_0)) \leq \epsilon$.*

Définition 9. *Soit E et F deux espaces métriques et $\mathcal{F} \subset C^0(E;F)$, une famille de fonctions. La famille $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$ et tout $x,\ y \in E$ vérifiant $d_E(x,y) \leq \eta$ on a $d_F(f(x), f(y)) \leq \epsilon$.*

Proposition 17. *Soit E et F deux espaces métriques et $\mathcal{F} \subset C^0(E;F)$ une famille équicontinue. Si E est compact alors $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue.*

Théorème 9. *(Théorème d'Ascoli) Soit E un espace métrique compact et F un espace métrique complet. Si une famille $\mathcal{F} \subset C^0(E;F)$ vérifie :*
(a) $\mathcal{F}$ est équicontinue,
(b) $\forall x \in E,\ K_x = \{f(x) \ / \ f \in \mathcal{F}\}$ est un sous ensemble relativement compact de F,
alors $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $C^0(E;F)$ pour la norme du sup.

Espaces de Hilbert et convexité

Définition 10. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, une application, $a : E \times E \to \mathbb{C}$, est une forme sesquilinéaire si et seulement si elle est antilinéaire en la première variable et linéaire en la deuxième variable. C'est à dire :*

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \qquad & y \mapsto a(x,y) \quad \text{est une forme linéaire,} \\ \forall y \in E, \qquad & x \mapsto \overline{a(x,y)} \quad \text{est une forme linéaire.} \end{aligned}$$

Une forme sesquilinéaire a est hermitienne si et seulement si

$$\forall x, y \in E, \qquad a(y,x) = \overline{a(x,y)}.$$

Définition 11. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, une forme hermitienne $a : E \times E \to \mathbb{C}$ est positive si et seulement si $\forall x \in E,\ a(x,x) \geq 0$. Elle est définie positive si et seulement si elle est positive et $x \in E,\ a(x,x) = 0$ implique $x = 0$.*

Proposition 18. *Soit E un espace préhilbertien, c'est un espace normé pour la norme définie par $\forall x \in E,\ \|x\| = \sqrt{(x,x)}$. On a de plus*

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, \quad & \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(x,y), \\ & \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \\ & |(x,y)| \leq \|x\|\ \|y\|. \end{aligned}$$

Définition 12. *Soit E un espace préhilbertien, on dit que $x, y \in E$ sont orthogonaux si et seulement si $(x,y) = 0$. On dit qu'une suite de E finie $(e_1, ..., e_N)$ ou infinie $(e_n)_{n \geq 1}$ forme un système orthogonal si et seulement si $\forall n \neq m,\ (e_n, e_m) = 0$. Le système est orthonormal si de plus $\forall n,\ \|e_n\| = 1$.*

Proposition 19. *(Inégalité de Bessel Parseval.) Soit $(e_1, ..., e_N)$ un système orthogonal d'un espace préhilbertien E. On a alors la relation de Pythagore : $\|e_1 + e_2 + ... e_N\|^2 = \|e_1\|^2 + ... \|e_N\|^2$. Si $(e_n)_{n \geq 1}$ forme un système orthonormal alors pour tout $x \in E$ on a l'inégalité de Bessel Parseval*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, x)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Définition 13. *Soit $B \subset E$, espace préhilbertien. L'orthogonal de B est l'ensemble*

$$B^{\perp} = \{x \in E,\ \forall b \in B,\ (b,x) = 0\}.$$

Proposition 20. *Soit $B \subset E$, espace préhilbertien. L'orthogonal $B^{\perp}$ est un sous espace vectoriel fermé de E et $B \cap B^{\perp} \subset \{0\}$. Si $B \subset C$ alors $C^{\perp} \subset B^{\perp}$. On a de plus $B^{\perp} = \mathrm{Vect}(B)^{\perp} = \overline{\mathrm{Vect}(B)}^{\perp}$.*

Définition 14. *Soit $\mathcal{T}$ un sous ensemble de E, espace préhilbertien. On dit que $\mathcal{T}$ est total si et seulement si le sous ensemble vectoriel qu´il engendre, noté $\mathrm{Vect}(\mathcal{T})$ est dense dans E.*

Proposition 21. *Si $\mathcal{T}$ un sous ensemble de E, espace préhilbertien, est total alors $\mathcal{T}^{\perp} = \{0\}$.*

Convexité et projections orthogonales

Définition 15. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un sous ensemble $C \subset E$ est convexe si et seulement si*

$$\forall x, y \in C,\ \forall \theta \in [0,1], \qquad \theta\ x + (1-\theta)\ y \in C.$$

Théorème 10. *Soit C un convexe* complet *d'un espace préhilbertien E. Pour tout $x \in E$ il existe un unique point $P_C x$, projection orthogonale de x sur C, tel que :*

$$\|x - P_C x\| = d(x, C) = \inf\{\|x - y\|,\ y \in C\}.$$

La projection $P_C x$ est caractérisée par

$$P_C x \in C, \qquad \forall y \in C,\ \mathrm{Re}(x - P_C x, y - P_C x) \leq 0.$$

De plus P_C est une contraction pour tout $x_1, x_2 \in E$, $\|P_C x_1 - P_C x_2\|_E \leq \|x_1 - x_2\|_E$.

Dans l'énoncé ci-dessus "caractérisé" signifie que $P_C x$ est l'unique solution du problème : trouver $z \in C$ tel que pour tout $y \in C$ on ait $\mathrm{Re}(x - z, y - z) \leq 0$.

Corollaire 2. *Soit V un sous espace vectoriel* complet *et non réduit à $\{0\}$ d'un espace préhilbertien E. Pour tout $x \in E$ il existe un unique point $P_V x$, projection orthogonale de x sur V, tel que :*

$$\|x - P_V x\| = d(x, V) = \inf\{\|x - y\|,\ y \in V\}.$$

La projection $P_V x$ est caractérisée par

$$P_V x \in V, \qquad \forall y \in V,\ (x - P_V x, y) = 0.$$

De plus $P_V \in \mathcal{L}(E)$ et $\|P_V\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$.

Proposition 22. *(Orthonormalisation.) Soit $V_1 \subset V_2 \subset ...V_n \subset V_{n+1} \subset ...$ une suite strictement croissante de sous espaces vectoriels d´un espace préhilbertien E avec $V_1 \neq \{0\}$. Si les V_n sont complets, il existe alors un système orthonormal e_1, e_2, ..., e_n, ... tel que $e_n \in V_n \cap V_{n-1}^{\perp}$. Si $\forall n$, $\dim(V_n) = n$ alors il existe un système orthonormal e_1, e_2, ..., e_n, , ... tel que $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base orthogonale de V_n.*

Définition 16. *Un espace de Hilbert H est un espace préhilbertien complet.*

Proposition 23. *Soit V un sous espace vectoriel fermé d´un espace de Hilbert H. On a alors $H = V \oplus V^{\perp}$ et $V^{\perp\perp} = V$.*

Corollaire 3. *Un sous ensemble $\mathcal{T}$ d´un espace de Hilbert H est total si et seulement si $\mathcal{T}^{\perp} = \{0\}$.*

Définition 17. *Une famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d´un espace de Hilbert H est une base hilbertienne si et seulement si elle est orthonormale et totale.*

Proposition 24. *Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne d´un espace de Hilbert H. Alors pour tout $x \in H$*

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (e_n, x)\, e_n$$

où la série est convergente dans H.

Proposition 25. *Un espace de Hilbert H admet une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si H est séparable.*

Théorème 11. *(Théorème de représentation de Riesz). Soit $l \in H'$, une forme linéaire continue, alors il existe un unique vecteur $u \in H$ tel que*

$$\forall v \in H, \qquad l(v) = (u, v).$$

Corollaire 4. *Soit a une forme sesquilinéaire continue, alors il existe $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que*

$$\forall (u, v) \in H \times H, \qquad a(u, v) = (Au, v).$$

Proposition 26. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ alors il existe un unique opérateur A^* tel que*

$$\forall (u, v) \in H \times H, \qquad (Au, v) = (u, A^* v).$$

C´est l´opérateur adjoint. On a de plus $\|A^*\|_{\mathcal{L}(H)} = \|A\|_{\mathcal{L}(H)}$ et $A^{**} = A$.

Définition 18. *Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est dit hermitien si et seulement si $A = A^*$.*

Proposition 27. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ et a la forme sesquilinéaire correspondante :*

$$\forall (u, v) \in H \times H, \qquad a(u, v) = (Au, v).$$

L´opérateur A est hermitien si et seulement si la forme sesquilinéaire a est hermitienne.

Théorème 12. *(Théorème de Lax Milgram.) Soit a une forme sesquilinéaire continue. On suppose qu´elle est coercive, c´est à dire :*

$$\exists \alpha > 0, \qquad \forall u \in H, \ \mathrm{Re}\ a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2.$$

Alors pour toute forme linéaire $l \in H'$, il existe un unique vecteur $u \in H$ tel que

$$\forall v \in h, \qquad a(u, v) = l(v)$$