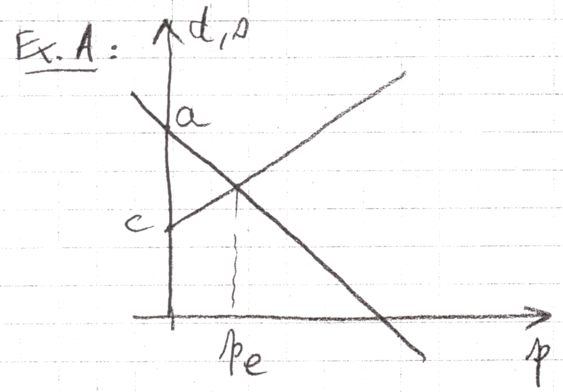
Solutions des exercices: C1

Ex. A :



si $c>0$, il faut que $a>c$ pour avoir un équilibre associé à $p>0$.

Ecrivons l'E.D. :

$$p_{t+1}-p_t = k(d(p_t)-s(p_t))$$
$$= k(a-bp_t-(c+dp_t))$$

Donc

$$(ED)\quad \boxed{p_{t+1}+p_t(k(b+d)-1) = k(a-c) > 0}$$

second membre constant

. Etat(s) d'équilibre : $p_t \equiv p_e \equiv$ constant

On obtient nécessairement : $\boxed{p_e = \dfrac{k(a-c)}{k(b+d)-1+1} = \dfrac{a-c}{b+d} > 0}$

. Equation homogène associée : (ED') $\boxed{y_{t+1} + \underbrace{(k(b+d)-1)}_{a_0} y_t = 0}$

on obtient :

. La SG de (ED') est $y_t = (1-k(b+d))^t\, y_0,\ \forall y_0 \in \mathbb{R}$

Et $\lambda = \lambda_1 := 1-k(b+d) = -a_0 \in \,]-1,+1[$

ssi $-1 < 1-\underset{>0}{k}\,\underset{>0}{(b+d)} < 1$ (toujours vrai) $\iff -1 < 1-k(b+d) \iff -2 < -k(b+d)$

$\iff k(b+d) < 2 \iff \boxed{k < \dfrac{2}{b+d}}$

. La SG de (ED) – cf cours – est de la forme :

$p_t = y_t + z_t$, où z_t est une SP de (ED), et y_t la SG de (ED')

Or $z_t := p_e$ est une SP de (ED). Donc la SG de (ED) est :

$$\boxed{\begin{aligned} p_t &= p_e + y_t = p_e + (1-k(b+d))^t y_0 \\ &= \frac{a-c}{b+d} + (1-k(b+d)^t)\Big(p_0 - \underbrace{\frac{a-c}{b+d}}_{p_e}\Big) \end{aligned}}$$

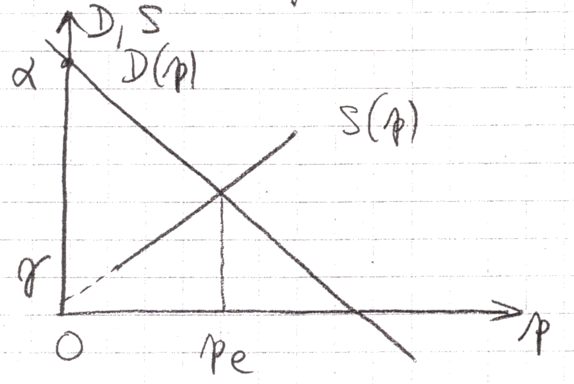
vérification : pour $t=0$, $p_0 = \dfrac{a-c}{b+d} + 1.\Big(p_0 - \dfrac{a-c}{b+d}\Big) = p_0$!

. Stabilité de p_e : p_e est globalement stable pour (ED) ssi 0 est un état d'équilibre globalement stable pour (ED').

C2

Or, puisque $a_1 = -a_0 = 1 - k(b+d) \neq 1$, cf cours, l'éq. homogène (ED') admet un seul état d'équilibre : 0, et celui-ci est globalement stable ssi $a_1 \in]-1,1[$, i.e ssi $\boxed{k < \frac{2}{b+d}}$: le processus de tâtonnement CV ssi $0 < k < \frac{2}{b+d}$. □

Ex. B : Le cycle de Cobweb.



Le (nouveau) prix p_t vérifie donc :

$$D(p_t) = \alpha + \beta p_t = S_t = S(p_{t-1}) = \gamma + \delta p_{t-1}.$$

Donc $p_t = \frac{1}{\beta}(\gamma + \delta p_{t-1} - \alpha)$

(avec $\beta < 0$, $\alpha, \delta > 0$, $\gamma < 0$ ou $\gamma > 0$)

• Donc (ED) $\boxed{p_t - \frac{\delta}{\beta} p_{t-1} = \underbrace{\frac{1}{\beta}}_{<0}\underbrace{(\gamma - \alpha)}_{<0}}$

• Le 2nd membre est constant, et $a := -\frac{\delta}{\beta} > 0$, donc $\exists!$ (unique) état d'équilibre $\boxed{p_e = \frac{\frac{1}{\beta}(\gamma-\alpha)}{1-\delta/\beta} = \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\delta} > 0 \quad (\text{et } \beta - \delta \neq 0)}$

• L'éq. homogène associée est : (ED') $\boxed{y_t - \frac{\delta}{\beta} y_{t-1} = 0}$

• Donc la SG de (ED') est $\boxed{y_t = \left(+\frac{\delta}{\beta}\right)^t y_0, \ \forall y_0 \in \mathbb{R}}$,

• et la SG de (ED) : $\boxed{p_t = p_e + y_t = \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\delta} + \left(\frac{+\delta}{\beta}\right)^t \left(p_0 - \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\delta}\right), \ \forall p_0 \in \mathbb{R}}$

Vérification : pour $t = 0$, $p_0 = p_e + 1\cdot(p_0 - p_e) = p_0$!

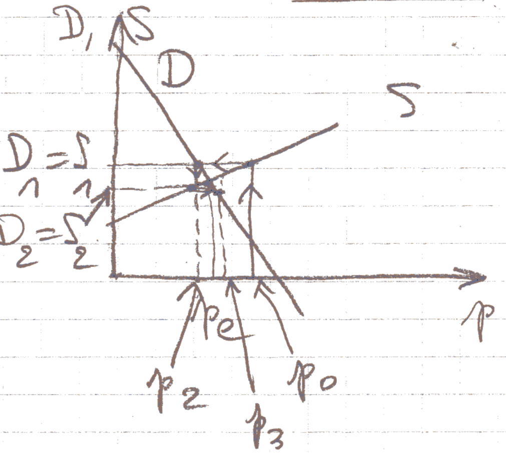
• Stabilité de p_e : p_e est globalement stable ssi 0 est un (l'unique) état d'équilibre globalement stable pour (ED'), i.e. ssi $-1 < +\delta/\beta < 1 \iff \boxed{\delta < -\beta}$ (car $\beta < 0 < \delta$).

Donc p_e est globalement stable ssi $|a| = \left|\frac{\delta}{\beta}\right| < 1$, i.e. puisque $\beta < 0 < \delta$, ssi $\boxed{0 < \delta < -\beta}$

Dans ce cas, $\forall p_0$, la suite $(p_t)_{t \in \mathbb{N}}$ CV vers p_e, i.e. "l'algorithme de calcul du prix d'équilibre p_e est convergent".

. Interprétation graphique :

Cas 1 : $\delta < -\beta \iff |a| = \left|\frac{\delta}{\beta}\right| < 1$

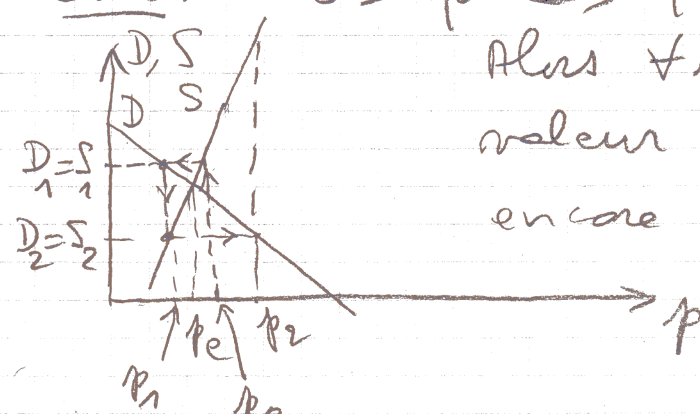


Alors la suite (p_t) CV vers p_e, et $\forall t$, $p_{t+1} - p_e = \underbrace{\frac{\delta}{\beta}}_{-1<\cdot<0}(p_t - p_e)$:

$(p_t - p_e) \xrightarrow[(t\to+\infty)]{} 0$ en changeant de signe : $\forall t$, p_e est entre p_t et p_{t+1} : encadrement de p_e

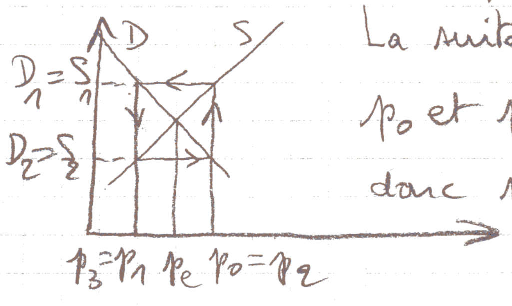
Cas 2 : $\delta > -\beta \iff |a| = \left|\frac{\delta}{\beta}\right| > 1$

Alors $\forall p_0$, la suite $(p_t) \to +\infty$ en valeur absolue, et $(p_t - p_e)$ change encore de signe à chaque itération.

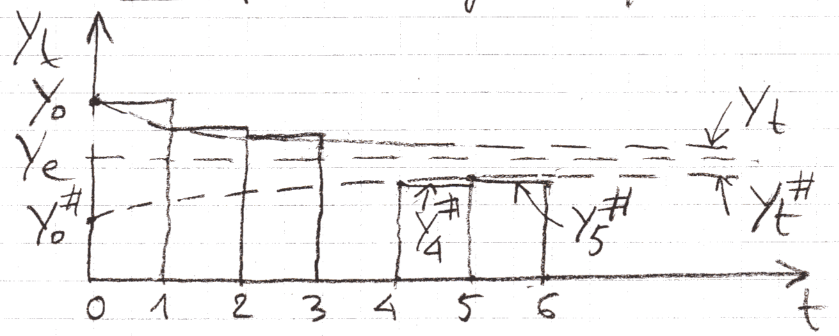


Cas 3 : $\delta = -\beta \iff |a| = \left|\frac{\delta}{\beta}\right| = 1$

La suite (p_t) prend alternativement les valeurs p_0 et p_1 (car $a_1 = \frac{\delta}{\beta} = -1$). Elle ne CV donc pas : elle DV (sans que $|p_t| \to +\infty$). □



- Ex. C : le multiplicateur dynamique
  - On a donc : $\boxed{Y_t = C_t + I = cY_{t-1} + c_0 + I}$ (ED)
    ($0<c<1$, c: propension marginale à consommer)
  - Eq homogène associée : $\boxed{y_t - cy_{t-1} = 0}$ (ED')
  - SG de (ED') : $y_t = c^t y_0 \; , \; \forall y_0 \in \mathbb{R}$
  - SP de (ED) : $Y_t = Y_e = \dfrac{c_0 + I}{1-c} > 0$: unique état d'équilibre ($1-c \neq 0$)
  - SG de (ED) : $\boxed{Y_t = \dfrac{c_0+I}{1-c} + c^t\left(Y_0 - \dfrac{c_0+I}{1-c}\right)}$
  - L'unique état d'équilibre de (ED) est globalement stable, comme l'unique état d'équilibre (: 0) de (ED'), car $\boxed{-1 < 0 < c < 1}$
  - Interprétation graphique :



- Ex. D : Le cycle du business de Samuelson
  - On a donc $\boxed{Y_t - c(1+\beta)Y_{t-1} + c\beta Y_{t-2} = G}$ (ED)
  - Eq. homogène associée : $\boxed{y_t - c(1+\beta)y_{t-1} + c\beta = 0}$ (ED')
  - Eq. caractéristique $\boxed{\lambda^2 - c(1+\beta)\lambda + c\beta = 0}$ (EC)
    Discriminant : $\boxed{\Delta = c^2(1+\beta)^2 - 4c\beta}$

· Il y a donc 3 cas :

· Cas 1 : $\Delta > 0 \iff c^2(1+\beta)^2 - 4c\beta > 0$

Alors il y a 2 racines réelles distinctes λ_1, λ_2.

La SG de (ED') est :

$$\boxed{y_t = \alpha(\lambda_1)^t + \beta(\lambda_2)^t \; ; \; \lambda_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(c(1+\beta) \mp \sqrt{\Delta}\right)}$$

· Cas 2 : $\Delta < 0 \iff c^2(1+\beta)^2 - 4c\beta < 0$

Alors il y a 2 racines complexes conjuguées

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_{\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}\left(c(1+\beta) \pm i\sqrt{-\Delta}\right). \text{ On pose :} \\ \lambda_{\frac{1}{2}} = r e^{\pm i\theta} := r(\cos\theta \pm i \sin\theta) \end{array}}$$

Alors la SG de (ED') est :

$$y_t = \alpha(\lambda_1)^t + \beta(\lambda_2)^t = \alpha(\lambda_1)^t + \bar{\alpha}(\bar{\lambda}_1)^t$$

(car on veut que y_t soit un nombre réel, $\forall t$)

On peut encore écrire :

$$\boxed{y_t = r^t\left(A\cos(t\theta) + B\sin(t\theta)\right), \; \forall t \in \mathbb{N}}$$

· Cas 3 : $\Delta = 0$, alors il y a 1 racine double (réelle)

$\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda = \frac{1}{2}c(1+\beta)$. La SG de (ED') est

$$\boxed{y_t = (\lambda)^t(At+B) = \left(\frac{1}{2}c(1+\beta)\right)^t(At+B)}$$

· On discutera plus tard des valeurs de c, β qui correspondent à chaque cas. Cherchons les états d'équilibre de (ED) : $Y_t \equiv Y_e$ = constante est un état d'équilibre de (ED) ssi $(1-c-c\beta+c\beta)Y_e = G$, i.e. si $\boxed{Y_e = \frac{G}{1-c} > 0}$ (rappel, $0 < c < 1$).

. Il y a donc un seul état d'équilibre $Y_e = \frac{G}{1-c}$. (C6

. Il sera globalement stable ssi 0 (l'unique état d'équilibre de (ED')) est globalement stable, i.e ssi $|a_1| < 1$ et $|a_2| < 1$, ce qui va dépendre aussi des valeurs de c et β, cf ci-dessous.

. Enfin, dans chacun des 3 cas ci-dessus, la SG de (ED) s'écrit $Y_t = \frac{G}{1-c} + y_t$,

y_t : SG de (ED'), et y_t dépend de deux constantes arbitraires α, β ou A, B, qu'on peut déterminer de manière unique à l'aide de la Condition Initiale (double) : Y_0, Y_1 connus.

. Etudions le signe de Δ : $\Delta \underset{(>)}{=} 0 \iff c^2(1+\beta)^2 - 4c\beta \underset{(>)}{=} 0$

$\iff \begin{cases} c = \frac{4\beta}{(1+\beta)^2} := f(\beta) \\ c > f(\beta) \quad (\text{car } c > 0) \end{cases}$. Rappel : $a^2 - c(1+\beta)a + \beta c = 0$

. De même (relations entre somme et produit des racines et coefficients)

$a_1 + a_2 = c(1+\beta) > 0$, $a_1 a_2 = \beta c > 0$

Donc, . si les 2 racines a_1, a_2 sont réelles ($\Delta \geq 0$), on a :

$a_1 > a_2 > 0$ (en notant a_1 la plus grande)

donc $|a_1| = a_1 \geq \sqrt{\beta c} \geq |a_2| = a_2$ (car $|a_1 a_2| = c\nu$)

. si les 2 racines a_1, a_2 sont complexes conjuguées, alors $|a_1| = |a_2| = \sqrt{c\nu}$.

. Donc si $c\nu > 1$, $\max(|a_1|, |a_2|) > 1$: l'état d'équilibre $Y_e = \frac{G}{1-c}$ est instable. Posons $g(\beta) := \frac{1}{\beta}$.

. Traçons les courbes :

a) $c = f(\beta) = \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}$. Tableau de variations :

$f'(\beta) = \frac{4(1-\beta)}{(1+\beta)^3}$

$f'(1) = 0$; $f(1) = 1$

$f(\beta) \sim \frac{4\beta}{\beta^2} = \frac{4}{\beta} \to 0 \ (\beta \to +\infty)$

β	0		1		$+\infty$
$f'(\beta)$		$+$	0	$-$	
$f(\beta)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

[De plus, f a un p^t d'inflexion pour $\beta = 2$]

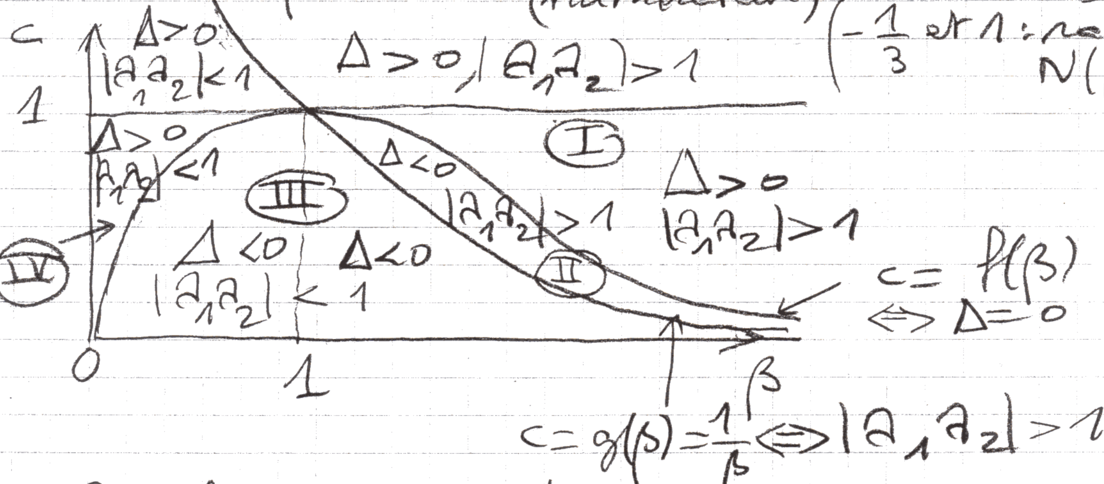
b) $c = \frac{1}{\beta} := g(\beta)$; $g'(\beta) = \frac{-1}{\beta^2} < 0$

β	0		1		$+\infty$
$g'(\beta)$		$-$		$-$	
$g(\beta)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

c) $h(\beta) := f(\beta) - g(\beta) = \frac{4\beta}{(1+\beta)^2} - \frac{1}{\beta} = \frac{N}{D}$; $N := 3\beta^2 - 2\beta - 1$, $D > 0$.

Donc $h(\beta) > 0 \Leftrightarrow \underset{\text{(numérateur)}}{N} > 0 \Leftrightarrow \beta < -\frac{1}{3}$ ou $\beta > 1$

($-\frac{1}{3}$ et 1 : racines de $N(\beta) = 0$.)



Rappel : on a supposé $0 < c < 1$

. D'où 4 régions :

. Dans (I), $\lambda_1 > 1 > \lambda_2$: $Y_t = \alpha(\lambda_1)^t + \beta(\lambda_2)^t + \frac{G}{1-c} \sim \alpha \lambda_1^t \underset{(t\to+\infty)}{\to +\infty}$

(DV monotone)

. Dans (II), $|\lambda_1| = |\lambda_2| = r = \sqrt{\beta c} > 1$: DV oscillante

$Y_t = (\sqrt{\beta c})^t (A\cos(t\theta) + B\sin(t\theta)) + \frac{G}{1-c}$

. Dans (III), $|\lambda_1| = |\lambda_2| = r = \sqrt{\beta c} < 1$: CV oscillante,

$Y_e = G/(1-c)$ est globalement stable

. Dans (IV), $0 < \lambda_2 < \sqrt{\beta c} < \lambda_1$. Etudions λ_1

on a : $\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(1+\beta c+\sqrt{c^2(1+\beta)^2-4\beta c}\right)$

$\le \frac{1}{2}\left(1+\beta c + \sqrt{c\underbrace{(1+\beta)^2}_{\geq 0}-4\beta c}\right)$, car $0<c<1 \Rightarrow c^2<c$

$= \frac{1}{2}\left(1+\beta c+\sqrt{c((1+\beta)^2-4\beta)}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\beta c+\sqrt{c}\sqrt{(1-\beta)^2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(1+\beta c+\underbrace{\sqrt{c}}_{\le 1}\underbrace{(1-\beta)}_{\geq 0}\right) \le \frac{1}{2}\left(1+\beta \underbrace{c}_{\le 1}+1-\beta\right)$

$\lambda_1 \le \frac{1}{2}\left(1+\cancel{\beta}+1-\cancel{\beta}\right) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$. Donc $\lambda_1 \le 1$.

Donc, en utilisant le fait que nous sommes dans la région IV, on a montré que $0<\lambda_2<\lambda_1\le 1$:

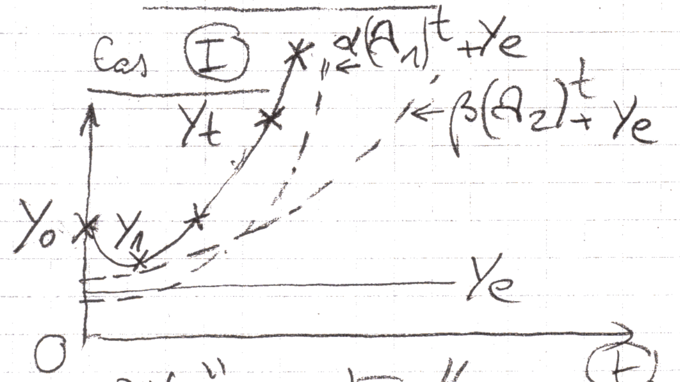
Donc $Y_t = \alpha(\lambda_1)^t+\beta(\lambda_2)^t+\frac{G}{1-c} \to \frac{G}{1-c} = Y_e$

L'équilibre Y_e est globalement stable, et quand $t \to +\infty$, $Y_t - Y_e \sim \beta(\lambda_2)^t \to 0$, de signe constant : $(0<\lambda_2<1)$

CV monotone

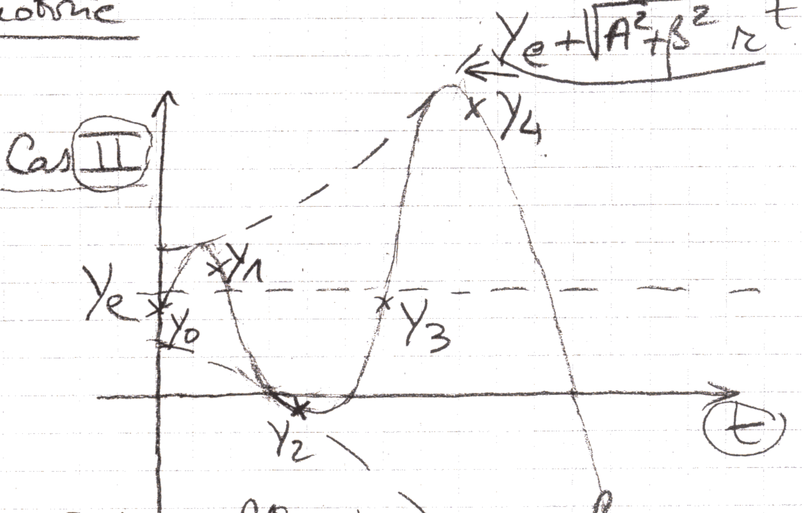
- Illustration :

Cas I



DV "monotone" : exemple

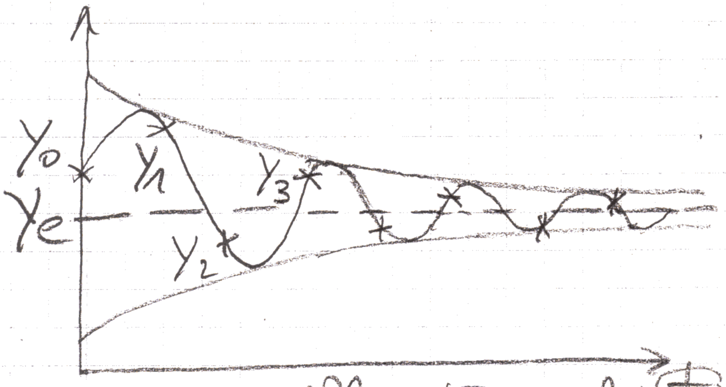
Cas II



DV oscillante : exemple

(/!\ des valeurs $Y_t<0$ apparaîtront)

Cas III :



CV oscillante (cycles) : exemple

Cas IV : CV "monotone" : Exemple