

M1 Math 2008/09. Systèmes dynamiques. TD1

1. Echauffement : Tracer les graphes des fonctions suivantes

$$\ln x, \exp x, \sin x, \cos x, \tan x,$$

et des fonctions réciproques, en indiquant sans justification les domaines de définition de ces fonctions. Préciser si ces fonctions sont Lipschitziennes, localement ou globalement.

Mêmes questions pour les fonctions suivantes : tracer les graphes des fonctions suivantes

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x & f_2(x) &= x^2 \\ f_3(x) &= x(1-x) & f_4(x) &= x|x|, \\ f_5(x) &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

préciser si ces fonctions sont Lipschitziennes, localement ou globalement, ainsi que les ensembles $f_i^{-1}(\{0\})$ associés.

2. Explosion. Equation de Riccati On considère l'équation

$$\frac{dx}{dt}(t) = x(t)^2 \tag{1}$$

1. Résoudre cette équation différentielle ordinaire (EDO) en divisant les deux membres par x^2 . En déduire la courbe intégrale de (1), passant par le point $(t, x) = (0, x_0)$, pour toutes les valeurs réelles de x_0 .
2. Tracer ces courbes intégrales et préciser le temps d'explosion, dans le passé ou l'avenir en fonction de la donnée initiale.
3. Mêmes questions pour l'EDO

$$\frac{dx}{dt} = \pm x|x|$$

3. Dynamique de populations On considère l'EDO suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \frac{dx}{dt}(t) = \lambda x(t)(1 - x(t)) \quad \text{avec} \quad \lambda \neq 0 \tag{2}$$

Etudier d'abord les états d'équilibre et leur stabilité. Etudier ensuite la solution de cette EDO en vous inspirant de l'exercice précédent, et en décomposant la fraction rationnelle $\frac{x}{1-x}$ en éléments simples. Que pouvez-vous dire du comportement en grand temps de la solution, en fonction de la place de la donnée initiale par rapport aux états d'équilibre.