Exercices : Feuille 2

Ex. A : le tâtonnement de Walras (cas continu), cf Ex. A, feuille 1). Demande $D(p) := \alpha + \beta p$, offre $S(p) := \gamma + \delta p$ avec $\beta < \delta$, car en général $\beta < 0 < \delta$. On postule alors :

$$\dot{p} = k(D(p) - S(p)) = k(\beta - \delta)p + k(\alpha - \gamma).$$

Donner la SG de cette EDO. Etat(s) d'équilibre, stabilité ?

Ex B : le modèle Keynésien : le revenu Y croît en réponse à un excès de demande : $D - Y$. On suppose que l'investissement I et les dépenses gouvernementales G sont données (constants, et exogènes), et la consommation $C = c_0 + cY$, $c_0, c > 0$. On postule alors :

$$\dot{Y} = k(c_0 + cY + I + G - Y), \text{ avec } k > 0, I, G > 0.$$

1) Donner la SG de cette EDO. Etat(s) d'équilibre ? Stabilité ?

2) Version non linéaire : on suppose $C = C(Y)$, $C'(Y) > 0$; $C(0) = 0$

On obtient l'EDO : $\dot{Y} = k(D - Y) = k(C(Y) - Y + I + G) := k f(Y)$

Tracer le graphe de f en supposant que $\forall Y, C'(Y) < 1$.

Etat(s) d'équilibre, stabilité ! (Faites une discussion graphique).

Ex C :
Le modèle de Harrod - Domar : Harrod suppose que :
(i) l'épargne $S = sY$, Y : revenu, $0 < s < 1$; (ii) le capital $K(t)$ s'accumule suivant $\dot{K} := I = v\dot{Y}$, $v > 0$ constant et (iii) $S \equiv I$. D'où $S = sY = v\dot{Y} = I$, donc

$\dot{Y} = \frac{s}{v} Y$. Donner la SG de cette EDO en fonction de $Y(0)$ et tracer qualitativement son graphe. Vérifier que I satisfait la même EDO : $\dot{I} = \frac{s}{v} I$.

Rem (cf TU, p 16-17) : Domar part de l'investissement :
(i) il augmente le revenu (et de l'emploi) : $dY = \frac{1}{s} dI$,

donc $\dot{Y} = \frac{1}{s}\dot{I}$; (ii) il augmente la capacité de production P : $\dot{P} = \frac{1}{v}\dot{K} = \frac{I}{v}$,
où s est la propension marginale à épargner et $\frac{1}{v}$ la productivité de l'investissement. Enfin, on suppose que la demande ainsi créée $\dot{Y} = \frac{\dot{I}}{s}$ est égale à $\dot{P}$. On a donc $\dot{Y} = \frac{\dot{I}}{s} = \dot{P} = \frac{I}{v}$, donc on retrouve bien l'EDO :

$\dot{I} = \frac{s}{v} I$, et de même $\dot{Y} = \frac{s}{v} I$, donc les deux modèles ~~sont~~ les mêmes

Ex. D: Le modèle néo-classique de Solow-Swan (1956)
[cf encore P N.V. TU]. Les hypothèses sont :
(i) L'emploi L vérifie $\dot{L} = nL$
(ii) Toute l'épargne $S = sY$ est investie dans la formation du capital : $S = I = \dot{K} + \delta K$. ($s, \delta > 0$, constantes)
(iii) On suppose que (ici, Y est la production) :

$$Y = F(K, L) = L\,F\left(\frac{K}{L}, 1\right) := L\,F\left(\frac{K}{L}, 1\right) := L f\left(\frac{K}{L}\right) := L f(k)$$

En déduire que le capital par tête : $k = \frac{K}{L}$ vérifie

$$\boxed{\dot{k} = s f(k) - \lambda k := g(k) \quad (*)}$$ (Solow-Swan)

où $\lambda := n + \delta > 0$, et $f(k) = \frac{Y}{L}$ la production par tête.

1) On suppose que $\forall k$, $f''(k) < 0 < f'(k)$: f est donc concave et croissante (strictement), avec $f(0) = 0$, $f'(k) \to +\infty$ $(k \to 0_+)$. Tracer le tableau de variations de la fonction g :

(complétez...)

k	0		k_e		$+\infty$
$g''(k)$	$-$	$-$		$-$	
$g'(k)$	$+\infty$	$+$			
$g(k)$	0		0		

Montrer que g est d'abord $\nearrow$, puis $\searrow$ strictement, et qu'elle s'annule seulement pour $k=0$, et pour une unique valeur $k_e > 0$. Tracer (qualitativement) son graphe. En déduire la stabilité des deux états d'équilibre $k=0$ et $k=k_e$ à l'aide d'un raisonnement graphique.

2) Déterminer k_e si $\lambda = s$ et $f(k) = \sqrt{k} = k^\alpha$, $\alpha = \frac{1}{2}$ (calculette (et/ou intuition) autorisées).

3) Vérifiez sur cet exemple qu'en posant $x = k^{1-\alpha} \underset{ici}{=} \sqrt{k}$, la fonction inconnue $\{t \mapsto x(t)\}$ est solution d'une EDO linéaire à coefficients constants. Résoudre explicitement cette EDO et retrouver ainsi le résultat de stabilité de la question 2.

. Ex. E : Un modèle continu d'interaction multiplicateur-accélérateur (cf l'oscillateur (discret) de Samuelson). (cf P. Dameron). Le revenu $Y(t)$ est lié à la consommation
P.N.V. TU
$C(t)$ par : $C(t) = cY(t) - \dot{Y}(t)$, $0 < c < 1$. L'investissement $I(t)$ vérifie : $I(t) = \beta \dot{C}(t)$, $\beta = v$: accélérateur. Enfin $Y(t) = C(t) + I(t) + G$, G : dépenses gouvernementales. Ecrire l'EDO vérifiée par la fonction $\{t \mapsto Y(t)\}$. Etudier sa dynamique suivant les valeurs de c et β.

. Ex. F : Révision : Tracer les graphes des fonctions $\{x \mapsto f(x)\}$, pour : 1) $f(x) = ax$, $a>0$ ou $a<0$; 2) $f(x) = ax^2$, $a>0$ ou <0 ; 3) $f(x) = ax^3$, $a>0$ ou $a<0$; 4) $f(x) = ax(1-x)$, $a>0$ ou <0 ; 5) $f(x) = \pm x(1-x)(1+x)$; $f(x) = x^\alpha$, $\alpha > 1$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha < 0$ $(x>0)$; 6) $f(x) = e^x$; 7) $f(x) = e^{-x}$; 8) $f(x) = x e^{-x}$, $x > 0$; 9) $f(x) = e^{-x^2}$.