. Rem Par contre, la matrice $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0.I$ est évidemment diagonalisable : le s.e.v. propre associé est $\mathbb{R}^2$: sa dimension est 2 et 0 est valeur propre double.

B) Exponentielle de matrices :

. Prop 1 : $\forall A$ matrice $N\times N$, on pose :

$$e^A=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}A^n.$$ Cette série est CV $\forall A$.

. De plus si 2 matrices A et B commutent, i.e. si $AB=BA$, alors $e^{A+B}=e^A.e^B=e^B.e^A$.

En particulier $e^A e^{-A}=e^{-A}e^A=I$.

. Si A est diagonalisable, alors $\exists P ; A=PDP^{-1}$

$$e^A=Pe^DP^{-1}=P\begin{pmatrix}e^{\lambda_1}&&0\\&\ddots&\\0&&e^{\lambda_N}\end{pmatrix}P^{-1}.$$

. Formule plus compliquée si A est seulement "jordanisable".

Dém. Admise. ⚠ si A et B ne commutent pas, il se peut que $e^{A+B}\neq e^A.e^B$, ex. $A=\begin{pmatrix}0&0\\a&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&-a\\0&0\end{pmatrix}$.

§ 2-3 - Solution générale d'un système homogène à coeff^{ts} constants

. Thm 4 : La sol. générale du système $\dot{X}(t)=AX(t)$ (13)

est donnée par

$$X(t)=e^{(t-t_0)A}X_0,\ \forall X_0\in\mathbb{R}^N. \qquad (14)$$

Donc l'ensemble des solutions du système (13) est un e.v. de dimension N := taille du système (13).

En particulier, (14) est l'unique solution du Pb de Cauchy (13), (15), où $X(t_0)=X_0$ (15).

. Corollaire : si A est diagonalisable, et si e.g. $t_0=0$,

$$\boxed{\text{alors la sol. générale est } \quad X(t)=Pe^{tD}P^{-1}X \text{, où } A=PDP^{-1}} \quad (14')$$

. Dém. • supposons $t_0=0$ pour simplifier. D'abord, $\forall A$ matrice $N\times N$,

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(e^{(t+h)A}-e^{tA}\right), \text{ et } e^{(t+h)A}=e^{tA}.e^{hA},$$

car hA et tA commutent (⚠). Donc

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = e^{tA}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(e^{hA}-I) = e^{tA}\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cancel{I}-\cancel{I}}{h}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{h^kA^k}{h\cdot k!}\right)$$

$$= e^{tA}\lim_{h\to 0}\left(A+h\frac{A^2}{2!}+\dots+h^{k-1}\frac{A^k}{k!}+\dots\right)$$

$$= \underset{\substack{\| \\ Ae^{tA}}}{\underline{e^{tA}.A}}\lim_{h\to 0}\Big(I+\underbrace{h\Big(\frac{A}{2!}+\frac{hA^2}{3!}+\dots+h^{k-2}\frac{A^{k-1}}{k!}+\dots\Big)}_{\text{série entière CV de matrices, } R_{CV}=+\infty}\Big)$$

(car A et $\frac{A^k}{k!}$ commutent)

Donc $\left\|\frac{d}{dt}(e^{tA})-Ae^{tA}\right\| = \lim_{h\to 0} O(h) = 0$.

Donc $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA} = e^{tA}A$. Donc (si e.g. $t_0=0$)

$$\underset{\sim\sim}{\frac{dX}{dt}(t)} = \frac{d}{dt}(e^{tA}X_0) = \frac{d}{dt}(e^{tA})X_0 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{Ae^{tA}X_0} = AX(t). \quad (15)$$

Donc $\forall X_0\in\mathbb{R}^N$, $X(t):=e^{tA}X_0$ est solution de (14).

• Maintenant, soit $X^i(t):=e^{tA}X_0^i$, $1\le i\le N$, (15')

où les X_0^i, $1\le i\le N$ forment une base qlcq de $\mathbb{R}^N$.

Alors $\forall t\in\mathbb{R}$, $X^i(t)$ est l'<u>unique solution</u> du Pb de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{X}^i(t) = AX^i(t), & \underline{\underline{\forall t\in\mathbb{R}}} \\ X^i(0) = X_0^i \end{cases} \quad (16)$$

qui vérifie <u>exo</u> les hypothèses du <u>Thm de Cauchy global</u>, cf ch 1, donc $X^i(\cdot)$ est définie <u>sur $\mathbb{R}$</u>.

De plus $\forall t\in\mathbb{R}$, <u>la famille</u> $\overline{X^i(t)}$, $1\le i\le N$, est <u>linéairement indépendante</u>, car si $\exists \alpha_i\in\mathbb{R}, 1\le i\le N$, tq $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i X^i(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e^{tA} X_0^i = e^{tA}\left(\sum_{i=1}^{N}\alpha_i X_0^i\right) = 0$,

comme e^{tA} est inversible (son inverse est e^{-tA}),
on a $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i X_0^i = 0$, donc $\alpha_i = 0, \forall i = 1,\dots,N$.
(famille libre)

. En particulier, si A diagonalisable, alors

$$e^{tA} = e^{tPDP^{-1}} = I + tPDP^{-1} + \frac{t^2}{2!} PD\cancel{P^{-1}}\cancel{P}DP^{-1} + \dots$$

$$= I + tPDP^{-1} + \frac{t^2}{2!} PD^2P^{-1} + \dots + \frac{t^k}{k!} PD^kP^{-1}$$

$$= P\left(I + tD + \dots + \frac{t^k D^k}{k!} + \dots\right)P^{-1} = Pe^{tD}P^{-1}$$

Donc $e^{tA}\big/_{X_0} = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_N} \end{pmatrix} P^{-1}$, si A diagonalisable (17)

En posant $X_0 := PZ_0$, i.e. $Z_0 := P^{-1}X_0$, on a montré : (****)

Thm 5 : Si A diagonalisable : $A = PDP^{-1}$, alors
la sol générale de (14) est
$$X(t) = e^{tA} X_0 = PZ(t) = Pe^{tD}P^{-1}X_0 = Pe^{tD}Z_0.$$
Donc dans la base de $\mathbb{R}^N$ formée de vecteurs propres $\vec{w_i}$ de A associés à la matrice P, la solution générale $Z(t)$ a pour composantes

$$\begin{cases} z_i(t) = e^{t\lambda_i} \cdot z_{i,0}, \text{ sol générale de } \dot{z}_i(t) = \lambda_i z_i(t) \in \mathbb{R} \quad (18_i) \\ \text{pour } i = 1,\dots,N : \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Si A est diagonalisable, le système diff. linéaire (14) se découple en N éq. diff. ordinaires (18_i) indépendantes, $i = 1,\dots,N$

§ 2-4 - Cas $N=2$ - Etude des trajectoires d'un système à coefficients constants près d'un point d'équilibre :

. On considère le système $\dot{X}=AX$ linéaire, à coefficients constants, sans second membre.

On pourra noter - cf TD -

$X(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Si au départ le système était linéaire autonome, avec un second membre constant : $\dot{Y}(t) = AY(t) + B^*$ (14')

avec $B^* := \begin{pmatrix} b^* \\ c^* \end{pmatrix}$, alors on peut se ramener au cas homogène si A inversible : on pose alors

$Y^* = A^{-1}B^*$, puis $X(t) := Y(t) - Y^*$, (15)

d'où $\dot{X}(t) = A\,X(t)$. (14)

Si A est inversible, $\left\{\begin{matrix}(14')\\(13')\end{matrix}\right\}$ n'a qu'un seul état d'équilibre : $X=0$, i.e. $Y=-Y^*$. Si A n'est pas inversible, l'équation

$AY^* + B^* = 0$ (16)

peut ne pas avoir de solution ; dans ce cas, (14) n'a pas d'état d'équilibre, ou en avoir une infinité. Dans ce cas, (14) a une infinité d'états d'équilibre B^*. Dans les deux cas, 0 est point d'équilibre [de (13')].

Exo : On considère le système :

$\begin{cases} \dot{x} = \alpha \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$. Etudier ses états d'équilibre, suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.

□

. On étudie les valeurs propres λ_1, λ_2 de $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Elles vérifient : $\lambda^2 - (a+b)\lambda + ad - bc = 0$, donc

$\lambda_1\lambda_2 = \underset{:=\Delta(A)}{\det(A)}$, et $\lambda_1 + \lambda_2 = a+b := Tr(A)$ (trace de A.) (17)

A) <u>Premier cas :</u> $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ($\Delta > 0$)

. Alors A est <u>diagonalisable</u> : en posant

$$\begin{cases} X(t) = P\, Z(t) \text{ et } D = \mathrm{diag}(\lambda_1 \lambda_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, & (18) \\ \dot{Z}(t) = D\, Z(t) : \ Z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} z_{1,0} \\ e^{t\lambda_2} z_{2,0} \end{pmatrix}, & z_{1,0}, z_{2,0} \text{ qlq.} \end{cases}$$

les trajectoires du système diagonal vérifient

donc $\begin{cases} |z_2(t)| = C\, |z_1(t)|^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad C := \dfrac{|z_{2,0}|}{(|z_{1,0}|)^{\lambda_2/\lambda_1}}. & (19) \end{cases}$

et $\mathrm{sgn}(z_i(t)) = \mathrm{sgn}(z_{i,0})$ $\quad i = 1, 2.$

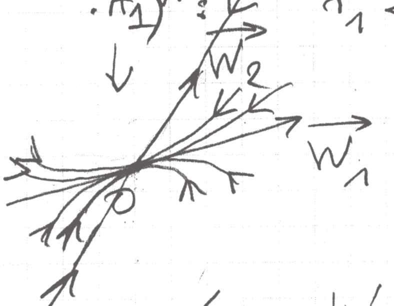
signe

. Par ailleurs, les vecteurs propres $\vec{W_i} := \begin{pmatrix} v_i \\ w_i \end{pmatrix}$ de A vérifient

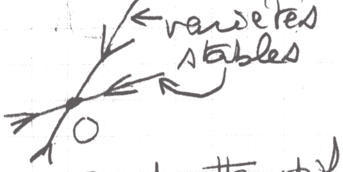
$$(a - \lambda_i) v_i + b\, w_i = 0 \ ; \text{et } c\, v_i + (d - \lambda_i) w_i = 0, \quad (20)$$

mais ces deux équations sont <u>proportionnelles</u> (0%), car λ_i est valeur propre. On a donc une figure du type :

. A1) : $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$: toutes les trajectoires en $X = 0$ sont tangentes à $\vec{W_1}$, <u>sauf</u> celle qui correspond à $z_1 = 0$, qui est co-linéaire à $\vec{W_2}$. De plus, <u>O est (fortement) stable</u> ; <u>on note</u> :



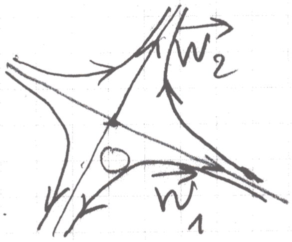
$$\begin{cases} \forall X_0, \ \|X(t)\| \to 0, \text{ et même} \\ \qquad e^{\alpha t} \|X(t)\| \to 0 \quad (t \to +\infty), & (21) \\ \forall \alpha < -\lambda_2 \end{cases}$$



O : <u>noeud attractif</u>

. A2) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: alors $|z_2(t)| = C\, |z_1(t)|^{\lambda_2/\lambda_1}$,

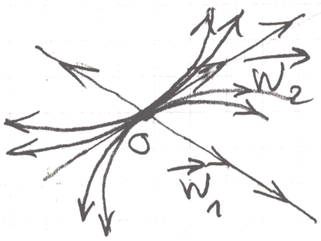
avec $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$, sauf si z_1 ou $z_2 = 0$.



La seule trajectoire tq $X(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$ est $z_2(t) \equiv 0$
$ -\infty \qquad z_1(t) \equiv 0$

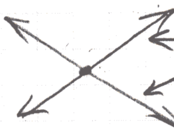
O : col (ou p^t selle) : variété instable
" stable

. A_3) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$: toutes les trajectoires en $X=0$ sont tangentes à $\vec{W_2}$, (car $|\lambda_2| > |\lambda_1|$), sauf celle qui est co-linéaire à $\vec{W_1}$.



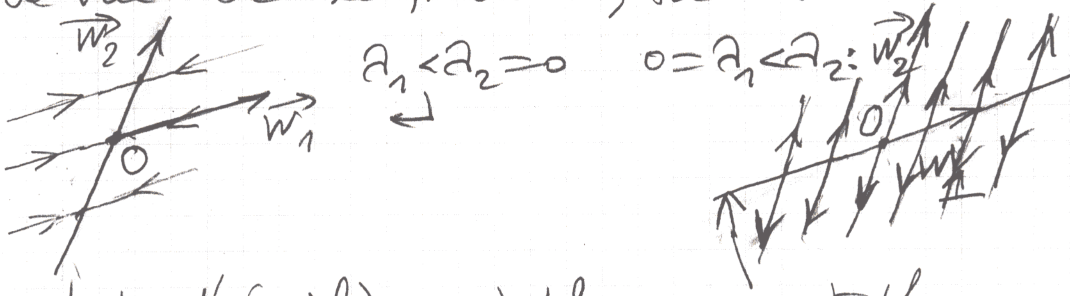
De plus O est (fortement) instable. On se ramène au cas A_1 en changeant t en $-t$: $\forall X_0, \forall \alpha > -\lambda_1$,

$$e^{\alpha t} \| X(t) \| \to 0 \ (t \to -\infty). \ (22)$$



O : noeud répulsif.

. A_4) $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$, [ou $\lambda_1 = 0 < \lambda_2$]. Dans ce cas la droite $\mathbb{R}\vec{W_2}$ [ou $\mathbb{R}\vec{W_1}$] est une droite de points d'équilibre, et du point de vue de la stabilité, on a :



points d'équilibre stables, instables.

B) Deuxième cas : $\lambda_1 \neq \lambda_2$, et $\lambda_2 = \bar{\lambda}$ ($\Delta < 0$).

. B1) α := Re λ_1 = Re $\lambda_2 = \frac{1}{2} tr(A) < 0$: on passe en coordonnées polaires, cf e.g. TD feuille 3, cf e.g. [J.P. Demailly : Analyse numérique et éq. diff., p 274 – 281].

Foyer stable :
ici, trajectoire associée à $\lambda_2 = \alpha + i\beta$, $\alpha < 0$, $\beta > 0$.

• B2) $\alpha := \mathrm{Re}\,\lambda_1 = \mathrm{Re}\,\lambda_2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(A) > 0$ (et $\Delta < 0$)

Idem : foyer instable

I ω, trajectoire associée à $\lambda_2 = \alpha + i\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$

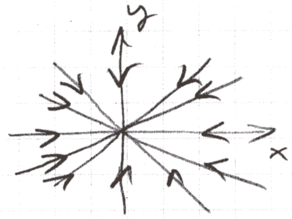
• B3) $\alpha = \mathrm{Re}\,\lambda_1 = \mathrm{Re}\,\lambda_2 = 0$ (et $\Delta < 0$)

I ω $\alpha = 0$, $\beta > 0$

C) Troisième cas : $\lambda := \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$

• C1) Cas diagonalisable : $\exists$ une base dans laquelle $\begin{cases} z_1 = z_{1,0}\, e^{\lambda t} \\ z_2 = z_{2,0}\, e^{\lambda t} \end{cases}$

Tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont vecteurs propres de $A = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{R}$



$\lambda < 0$

O : noeud stable

$\lambda > 0$

O : noeud stable

$\lambda = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^2$, x est un point stationnaire, stable

• C2) Cas non diagonalisable :

$\exists$ une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle on a :

$P^{-1} A P = J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ou (au choix) $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

bloc de Jordan. Avec ce choix, e.g. on a :

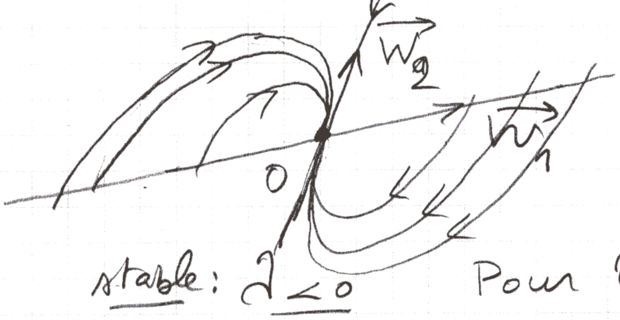
$z_1(t) = e^{\lambda t} z_{1,0}$, car $\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + \lambda x_2 \end{cases}$

$z_2(t) = (z_{2,0} + t z_{1,0})\, e^{\lambda t}$,

on obtient un : noeud exceptionnel

$t = \frac{1}{\lambda} \log \left| \frac{z_1}{z_{1,0}} \right|$

$z_2 = z_{2,0} \frac{z_1}{z_{1,0}} + \frac{z_1}{\lambda |z_{1,0}|} \mathrm{Log} \left| \frac{z_1}{z_{1,0}} \right|$



stable : $\lambda < 0$

Pour $\lambda > 0$, changer le sens des flèches.