Effets régularisants pour les solutions de lois de conservation scalaires nonlinéaires

proposé par :

Stéphane Junca

junca@unice.fr

1 Le thème

Les lois de conservations sont très importantes pour les applications, conservation de la masse, de l'énergie, ... Elles régissent de nombreuses lois de la Physique et plus récemment de la Biologie.
Pour la dimension $d \geq 1$, la variable d'espace $x \in \mathbb{R}^d$, la solution $u : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, le flux vectoriel $F \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$, le problème de Cauchy avec donnée initiale $u_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ s'écrit :

$$\partial_t u + \nabla_x \cdot F(u) = 0, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x). \quad (2)$$

Dans les années 1990, Pierre-Louis Lions, Benoît Perthame et Etan Tadmor, [14], ont démontré un effet régularisant pour les solutions physiques $u(.,.)$ avec seulement une donnée initiale $u_0 \in L^\infty$. Leur preuve s'appuie sur les fameux "lemmes de moyennes" grâce à une formulationn cinétique ingénieuse de l'équation (1). Plus récemment, une équipe germano-suisse a obtenu de nouveau résultats pour les solutions de (1), [8]. Ces nouveaux résultats confèrent aux solutions L^∞ des traces, voire [18, 12], pour des fonctions qui ne devraient pas en avoir a priori. Toutes les preuves de ces résultats utilisent la formulation cinétique de [14].

En dimension 1, $d = 1$, l'équation (1) devient simplement :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

avec le flux scalaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Un effet régularisant des solutions de l'équation (3) avait été obtenu dans les années 50 par une célèbre mathématicienne russe, Olga Oleinik, puis par le célébrissime américain d'origine hongroise, Peter D. Lax, [13]. En dimension 1, les résulats sont optimaux et utilisent d'autres méthodes que la formulation cinétique de [14].

L'objet de ce stage est d'étudier les effets régularisants obtenues pour les solutions de l'équation (3) pour des flux nonlinéaires et non convexes, afin d'éclairer le "paradoxe" des résultats obtenus en dimension supérieure d'une part dans [14] et d'autre part dans [8].

2 Déroulement du stage

Le travail commencera par la lecture du chapitre 10 de [13]. Il faudra comprendre l'effet régularisant instantanné pour les flux convexes à l'aide de la formule de Lax. Pour cela, l'apparition des ondes de choc joue un rôle crucial.

On travaillera ensuite dans les espaces de Sobolev fractionnaires $W^{s,1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $0 < s < 1$, [1] que l'on présentera. $s = 1$ ne sera pas considéré à cause des ondes de choc.

Puis on attaquera l'effet régularisant pour des flux nonlinéaires et non convexes.

Finalement, les résultats obtenus à plusieurs dimensions d'espace dans [14, 18, 8, 12] seront illustrés à l'aide de solutions multidimensionnelles issues de problèmes unidimensionnels. Des liens seront fait entre les effets régularisants, la décroissance en temps des solutions périodiques, [4, 6, 7], et la propagation ou non d'oscillations de très hautes fréquences, [9, 3, 11] pour les solutions de la loi de conservation (1).

Références

[1] R. A. Adams, Sobolev spaces,
Acad. Press, 1975.

[2] F. Berthelin, S. Junca, *Averaging lemmas with a force term in the transport equation*, arXiv :0811.4553v2,to appear in J.M.P.A., preprint 2009.

[3] G.-Q. Chen, S. Junca, M. Rascle, *Validity of Nonlinear Geometric Optics for Entropy Solutions of Multidimensional Scalar Conservation Laws*, Journal of Differential Equations, **222**, 439–475, (2006).

[4] K. S. Cheng, *Decay rate of periodic solutions for a conservation law.* J. Diff. Eqs. 42, 390–399,(1981).

[5] C. Cheverry, *Regularizing effects for multidimensional scalar conservation laws.* Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Nonlinéaire 17, no. 4, 413-472, (2000).

[6] C. Dafermos, *Regularity and large time behavior of solutions of a conservation law without convexity.* Proc. Royal Soc. Edinburgh 99 A, 201–239, (1985).

[7] C. Dafermos, Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics,
Springer, 2000.

[8] C. De Lellis, F. Otto, M. Westdickenberg, *Structure of entropy solutions for multidimensional scalar conservation laws.* Arch. ration. Mech. Anal. 170, no2, 137–184, (2003).

[9] B. Engquist, and W. E, *Large time behavior and homogenization of solutions of two-dimensional conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math. **46**, 1–26, (1993).

[10] P.-E. Jabin, *Some regularizing methods for transport equations and the regularity of solutions to scalar conservations laws*, Seminaire X-EDP, to appear, preprint 2009.

[11] S. Junca, *Maximal smoothing effect for nonlinear scalar conservation laws* , preprint 2009.

[12] Y.-S. Kwon, A. Vasseur, *Strong traces for solutions to scalar conservation laws with general flux.* Arch. Ration. Mech. Anal. 185, no. 3, 495–513, (2007).

[13] P.D. Lax, Hyperbolic Partial Differential Equations,
Lecture notes, Courant Institute of Mathematical Sciences, American Mathematical Society, 2006.

[14] P.-L. Lions, B. Perthame, E. Tadmor, *A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations*, J. Amer. Math. Soc. **7**, 169–192, (1994).

[15] B. Perthame, Kinetic Formulation of Conservation Laws,
Oxford University Press, 2002.

[16] D. Serre, Systems of Conservation Laws I, II,
Cambridge University Press : Cambridge, 1999,2000.

[17] E. Tadmor, and T. Tao, *Velocity averaging, kinetic formulations, and regularizing effects in quasi-linear PDEs.* Comm. Pure Appl. Math. 60, no. 10, 1488–1521, (2007).

[18] A. Vasseur, *Strong traces for solutions of multidimensional scalar conservation laws.* Arch. Ration. Mech. Anal. 160, no. 3, 181–193, (2001).