

Inégalité de Harnack.

Sujet de mémoire proposé par Adam Parusinski

Soit $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ une courbe régulière projective réelle de degré d , définie par une équation

$$F(X, Y, Z) = 0$$

où F est un polynôme homogène de degré d . Alors l'inégalité de Harnack dit que C possède au plus $g + 1$ composantes connexes, où $g = (d - 1)(d - 2)/2$. (Puisque C est définie sur \mathbb{R} , pour d pair une telle C peut être vide).

On propose d'étudier une démonstration de ce résultat présentée dans Section 5 "Curves and surfaces in the projective space" du livre "Real algebraic and semi-algebraic sets" de Riccardo Benedetti et Jean-Jacques Risler. Cette démonstration est basée sur le théorème de Bezout qui affirme que deux courbes algébriques projectives planes C, D de degrés m et n , définies sur \mathbb{C} et sans composante irréductible commune, ont exactement mn points d'intersection, comptés avec multiplicités.

La question quels nombres de composantes connexes peuvent être vraiment réalisés est plus difficile (XVI problème de Hilbert). On connaît la réponse pour petits degrés.