Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE3 - 2 - **Compacité.**

Exercice 1 (Questions préliminaires)

1) Rappeler la définition d'un compact dans le cadre topologique, c'est-à-dire la propriété de Borel-Lebesgue.

2) Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors $[a, b]$ est un compact de $\mathbb{R}$.

Dans la suite, nous nous plaçons dans un espace métrique.

3) Rappeler le théorème de Bolzano-Weiestrass.

4) Montrer que dans un espace métrique, tout compact est fermé et borné.

5) Montrer que les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont les parties fermées et bornées.

Exercice 2 (Produit de compacts)

Cet exercice a pour but de démontrer quelques cas particuliers du théorème de Tychonoff.

1) Soient (E, d) un espace métrique, K et L des parties compactes de E. Montrer que le produit $K \times L$ est compact.
On en déduit facilement que tout produit fini de compacts est compact.

2) Posons $I = [0, 1]$ et $I^\infty = \prod_{k=1}^{+\infty} [0, 1]$. L'espace I^∞ est muni de la distance qui à $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}, y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in I^\infty$ associe $d(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k}$. Montrer que I^∞ est compact.

Exercice 3 (Equivalence des normes en dimension finie)

1) Munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|(x_1, \cdots, x_n)\|_\infty = \sup_{k=1,\cdots,n} |x_k|$, alors une partie de $\mathbb{R}^n$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

2) Soit N une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que $|N(x) - N(y)| \leq C\|x - y\|_\infty$ pour $x, y \in \mathbb{R}^n$.

b) Montrer que $S = \{x \in \mathbb{R}^n\, ;\, \|x\|_\infty = 1\}$ est compacte (pour la topologie issue de la norme $\|\cdot\|_\infty$) et que N y atteint sa borne inférieure.

c) En déduire que N et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$ et que toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$.

3) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie n. Montrer que toutes les normes sont équivalentes sur E.

Exercice 4 (Dans un e.v.n. de dim finie, compact équivaut à fermé, borné)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie n.

1) Montrer que tout compact de E est fermé, borné.

2) Montrer la réciproque en utilisant l'équivalence des normes.

3) Donner un contre-exemple en dimension infinie.

Exercice 5 (Distance à un ensemble et compacité)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. La distance entre deux parties A et B de E est définie par $d(A, B) = \inf_{(a,b)\in A\times B} \|a - b\|$.

1) Soient C et K des parties compactes (non vide) de E. Montrer qu'il existe $c \in C$ et $k \in K$ tels que $\|c - k\| = d(C, K)$.

2) Supposons que l'espace E est de dimension finie. Soient F une partie fermée (non vide) de E et K une partie compacte (non vide) de E. Montrer qu'il existe $f \in F$ et $k \in K$ tels que $\|f - k\| = d(F, K)$.

3) Donner un exemple de deux ensembles fermées F_1 et F_2 de $\mathbb{R}^2$ tels que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ et $d(F_1, F_2) = 0$.

Exercice 6 (Topologie de $A + B$ et compacité)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soient F une partie fermée de E et K une partie compacte de E.

1) Montrer que $F + K = \{f + k\,;\ f \in F \text{ et } k \in K\}$ est une partie fermée.

2) Montrer que si l'ensemble F est de plus supposé compact, alors l'ensemble $F + K$ est compact.

Exercice 7 (Passer du local au global)

Soient E un espace compact, (F, d) un espace métrique et $f : E \to F$ une application. On suppose que f est localement borné, c'est-à-dire que pour tout $x \in E$, il existe un voisinage V_x de x et une boule ouverte $B(a_x, r_x)$ de F, avec $r_x > 0$, telles que $f(V_x) \subset B(a_x, r_x)$. Montrer que f est bornée sur E.

Exercice 8 (Compacité et dimension finie)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie.

1) Soit F une partie fermée (non vide) de E. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $y \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - y\|$.

2) Soit A une partie bornée de E. Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant A.

Exercice 9 (Précompacité)

Soit (E, d) un espace métrique. L'espace E est dit précompact si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des boules ouvertes de rayon ε. Montrer qu'un espace précompact et complet est compact.

Exercice 10 (Idéaux de $C(\text{compact}, \mathbb{R})$)

Soit (E, d) un espace métrique compact.

1) Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $C(E, \mathbb{R})$ différent de $C(E, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = 0$ pour tout $f \in \mathcal{I}$.

2) Montrer que les idéaux maximaux de $C(E, \mathbb{R})$ sont les $\mathcal{I}_x = \{f \in C(E, \mathbb{R})\,;\ f(x) = 0\}$.

Exercice 11 (Borel-Lebesgue et premier Théorème de Dini)

Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions continues définies sur un espace métrique compact K et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f continue sur K, alors la convergence est uniforme.

Application : montrer que $t \mapsto \sqrt{t}$ est limite uniforme de polynômes sur $[0, 1]$. (Utiliser la suite $P_0 = 0$, $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \dfrac{1}{2}(t - P_n^2(t))$.)

Exercice 12 (Heine et second Théorème de Dini)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions croissantes définies sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f continue sur $[0, 1]$, alors la convergence est uniforme.

On peut appliquer ce résultat en probabilité par exemple pour le théorème de Glivenko-Cantelli : Soient $X_1, X_2, \cdots$ une suite de v.a.r. indépendantes et identiquement distribuées, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Notons F la fonction de répartition commune des X_i. Pour $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, posons $F_n(t) = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{X_k \leq t}$. Alors p.s., $\sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.

Références : Gourdon, Nourdin, Pommellet