Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE3 - 4 - **Connexité.**

Exercice 1 (Résultats de cours sur les ensembles connexes)

Soit E un espace métrique.

1) Rappeler la définition d'une partie connexe et d'une partie connexe par arcs.

2) Soit A une partie de E. Montrer que A est connexe si et seulement si toute fonction continue de A dans $\{0,1\}$ est constante.

3) Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B \subset \overline{A}$. Montrer que si A est connexe, alors B est connexe.

4) Soit A une partie de E. Montrer que si A est connexe, alors $\overline{A}$ est connexe.

5) Montrer que si les parties A_i de E, pour $i \in I$, sont connexes avec $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe. Rappeler la définition d'une composante connexe.

6) Montrer que les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

7) Donner des exemples simples de connexes par arcs.

8) Montrer qu'une partie connexe par arcs est connexe.

9) Montrer que si E est un espace vectoriel normé et si A est une partie connexe et ouverte, alors A est connexe par arcs. Pour cela, on montrera que l'ensemble

$$T_a = \{x \in A\,;\, x \text{ est relié à } a \text{ dans } A\}$$

est ouvert, fermé et non vide.

Exercice 2 (Application aux fonctions)

Soient E et F des espaces métriques.

1) Soient A une partie connexe de E et $f : A \to F$ continue. Montrer que $f(A)$ est un connexe de F.

2) Soient I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. C'est le théorème des valeurs intermédiaires.

3) Soient I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. C'est le théorème de Darboux. Pour le démontrer, on posera $T = \{(x,y) \in I \times I\,;\, x < y\}$ et $g(x,y) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$, puis on prouvera que $g(T) \subset f'(I) \subset \overline{g(T)}$.

4) Soient I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que f est injective si et seulement si f est strictement monotone.

5) Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 3 (Connexes non connexe par arcs)

1) Adhérence du graphe de la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$. Soit $A = \{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 < x \leq 1\}$. Posons $C = \overline{A}$.

a) Montrer que $C = A \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, -1 \leq y \leq 1\}$.

b) Montrer que C est connexe et n'est pas connexe par arcs.

2) Cage infinie. Soient

$$A_n = \left\{ (\frac{1}{n}, y, 0) \in \mathbb{R}^3\,;\, 0 \leq y \leq 3n \right\},$$

$$B_n = \left\{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \,;\, 2n - \frac{1}{2} \leq y \leq 2n + \frac{1}{2}\right\},$$
$$C_n = \left\{(x, 2n, x(\frac{1}{n} - x)) \in \mathbb{R}^3 \,;\, 0 \leq x \leq \frac{1}{n}\right\}$$

et

$$X = \underset{n \geq 1}{\cup} (A_n \cup B_n \cup C_n).$$

Montrer que X est connexe, mais n'est pas connexe pas arcs.

Exercice 4 (Topologie matricielle)

1) Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, mais que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

2) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

3) Montrer que $SO(n)$ et $GL_n^+(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs.

Exercice 5 ($d(u_n, u_{n+1}) \to 0$ et ensemble connexe)

Soit (E, d) un espace métrique compact. Soit $(u_n)_n$ une suite de E telle que $d(u_n, u_{n+1}) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_n$.

1) Montrer que A est compact.

2) Supposons que A ne soit pas connexe, alors il existe deux fermés F et G non vides et disjoints de A tels que $A = F \cup G$. Posons $\delta = d(F, G)$, $F_\delta = \underset{f \in F}{\cup} B(f, \delta/3)$, $G_\delta = \underset{g \in G}{\cup} B(g, \delta/3)$ et $H_\delta = E \setminus (F_\delta \cup G_\delta)$.

a) Montrer que H_δ est un compact.

b) Construire une sous-suite de $(u_n)_n$ à valeurs dans H_δ.

c) Conclure que A est connexe.

Exercice 6 ($df(x)$ isométrie vectorielle)

Soit $(E, \langle\, , \rangle)$ un espace euclidien. Notons $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Soit $f : E \to E$ une application de classe C^1 telle que pour tout $x \in E$, $df(x)$ est une isométrie, c'est-à-dire vérifiant

$$\|df(x) \cdot h\| = \|h\|, \quad \text{pour tout } h \in E.$$

1) Montrer que pour tout $a \in E$, il existe un voisinage ouvert U_a de a tel que

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|, \quad \text{pour tout } x, y \in U_a.$$

2) Montrer que pour tout $x, y \in U_a$, $df(x) = df(y)$.

3) Soit $C = \{x \in E \,;\, df(x) = df(0)\}$. Montrer que $C = E$ et conclure que f est une isométrie affine.

Exercice 7 (Questions diverses)

1) Quelles sont les composantes connexes de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x \neq y\}$ et de $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \,;\, x \neq y\}$?

2) Montrer que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| = 1\}$ est connexe.

3) Soit $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que f n'est pas injective. On utilisera la fonction $g(z) = f(z) - f(-z)$.

4) Soient E un espace métrique, A et B des parties de E telles que B soit un connexe de E, On suppose que $B \cap A \neq \emptyset$, $B \cap (E \setminus A) \neq \emptyset$. Montrer que $B \cap \mathrm{Fr}A \neq \emptyset$. C'est le théorème de passage des douanes.

5) Dans $\mathbb{R}^2$, donner les composantes connexes du sous-espace constitué de l'hyperbole $xy = 1$ et de ses asymptotes.

Références : Chambert-Loir, Gourdon, Pommellet, Ramis, D. Serre