Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE3 - 6 - **Théorèmes de Points fixes.**

Exercice 1 (Théorèmes basiques)

1) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f([a,b]) \subset [a,b]$. Montrer que f admet au moins un point fixe.

2) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $[a,b] \subset f([a,b])$. Montrer que f admet au moins un point fixe.

3) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ croissante telle que $f([a,b]) \subset [a,b]$. Montrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice 2 (Contractant dans un complet)

Soit (E,d) un espace métrique complet. Soit $f : E \longrightarrow E$ telle que

$$d(f(x), f(y)) \leq k d(x,y)$$

pour tout $x, y \in E$, où $k \in [0,1[$ (f est contractante).

1) Soit $x_0 \in E$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$$

et en déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

2) Montrez qu'il existe $x \in E$ tel que $x = f(x)$ et que ce point fixe est unique.

3) Montrez que ces résultats (existence et unicité du point fixe) restent vrais si l'on remplace f contractante par l'existence d'une itérée f^K de f (avec $K \in \mathbb{N}^*$) qui soit contractante.

Exercice 3 (Dans un compact)

Soit (E,d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ telle que

$$d(f(x), f(y)) < d(x,y)$$

pour tout $x \neq y$.

1) Montrer l'existence et l'unicité d'un point fixe de f.

2) Soit $x_0 \in E$ quelconque. Posons $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que la suite ainsi définie est convergente et que sa limite est un point fixe de f.

Exercice 4 (Dans un compact convexe)

Soit K un compact, convexe d'un e.v.n. et $f : K \to K$ telle que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$$

pour tout $x, y \in K$.

Montrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice 5 (Courbe de Peano)

Soit E l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1] \times [0,1]$ muni de la norme infinie. soit

$$F = \{f \in E\,;\ f(0) = (0,0),\ f(1) = (1,1)\}.$$

Soit Φ l'application qui à $f \in F$ associe $\Phi(f) \in F$ selon

$$\Phi(f)(x) = \begin{cases} \frac{f(9x)}{3} & \text{si } x \in [0,1/9] \\ (\frac{1}{3},\frac{1}{3}) + \frac{f_1(9x-1)}{3} & \text{si } x \in [1/9,2/9] \\ (0,\frac{2}{3}) + \frac{f(9x-2)}{3} & \text{si } x \in [2/9,3/9] \\ (\frac{1}{3},1) + \frac{f_2(9x-3)}{3} & \text{si } x \in [3/9,4/9] \\ (\frac{2}{3},\frac{2}{3}) - \frac{f(9x-4)}{3} & \text{si } x \in [4/9,5/9] \\ (\frac{1}{3},\frac{1}{3}) + \frac{f_2(9x-5)}{3} & \text{si } x \in [5/9,6/9] \\ (\frac{2}{3},0) + \frac{f(9x-6)}{3} & \text{si } x \in [6/9,7/9] \\ (1,\frac{1}{3}) + \frac{f_1(9x-7)}{3} & \text{si } x \in [7/9,8/9] \\ (\frac{2}{3},\frac{2}{3}) + \frac{f(9x-8)}{3} & \text{si } x \in [8/9,1] \end{cases}$$

avec $f_1 = (-f_x, f_y)$ et $f_2 = (f_x, -f_y)$ pour $f = (f_x, f_y)$. Montrer que Φ admet un point fixe. (Remarque : on peut montrer que ce point fixe vérifie $f([0,1]) = [0,1] \times [0,1]$.)

Exercice 6 (Equations intégrales)

Soit $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et E l'espace des fonctions réelles continues sur $[a,b]$, muni de la norme infinie. Soit $\phi \in E$.

1) Montrer que si $(b-a) \sup\limits_{s,t\in[a,b]} |K(s,t)| < 1$, alors l'équation intégrale de Fredholm

$$x(t) = \phi(t) + \int_a^b K(s,t)x(s)\,ds, \quad t \in [a,b],$$

admet une solution unique $x \in E$.

2) Discuter le cas $a = 0$, $b = 1$ et $K(s,t) = \lambda$ constante réelle.

3) Montrer que l'équation intégrale de Volterra

$$x(t) = \phi(t) + \int_a^t K(s,t)x(s)\,ds, \quad t \in [a,b],$$

admet toujours une solution unique $x \in E$.

Exercice 7 (Théorème de point fixe de Kakutani)

Soit E un e.v.n. et K un compact convexe de E.

1) Soit T une application affine continue telle que $T(K) \subset K$. Soit $a \in K$. Posons $a_n = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} T^k(a)$.

a) Montrer que $a_n \in K$ et que $T(a_n) - a_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

b) En déduire que T admet au moins un point fixe dans K.

c) Montrer que l'ensemble des points fixes de T dans K est un compact convexe non vide.

2) Supposons maintenant que K est stable par T_1 et T_2 des applications affines continues et qui commutent deux à deux. Montrer qu'il existe un point de K qui est fixe pour T_1 et T_2.

3) Supposons maintenant que K est stable par une famille $(T_i)_{i\in I}$ (avec $I \subset \mathbb{N}$) d'applications affines continues et qui commutent deux à deux.

a) Supposons que I est fini. Montrer qu'il existe un point de K qui est fixe pour tous les T_i.

b) Montrer que la propriété reste vraie avec I infini.

Références : Chambert-Loir, Gonnord-Tosel, Gourdon, Pommellet, Rouvière