Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE3 - 8 - **Théorème de Cauchy-Lipschitz.**

Définition d'une solution

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$ et $f : \Omega \to \mathbb{K}^N$. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$y' = f(t, y), \qquad (t, y) \in \Omega, t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{K}^N. \qquad (\mathcal{E})$$

La variable t est appelée la *variable de temps* et la variable y la *variable d'état.*

Définition 1, Solution : Une solution de $(\mathcal{E})$ est un couple (I, y) où I est un intervalle I de $\mathbb{R}$ et y une fonction dérivable $y : I \to \mathbb{K}^N$ telle que
i) pour tout $t \in I$, $(t, y(t)) \in \Omega$,
ii) pour tout $t \in I$, $y'(t) = f(t, y(t))$.

Lemme, Formulation intégrale : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$ et $f : \Omega \to \mathbb{K}^N$ continue. Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Une fonction $y : I \to \mathbb{K}^N$ est une solution de $(\mathcal{E})$ telle que $y(t_0) = y_0$ si et seulement si
i) y est continue,
ii) pour tout $t \in I$, $(t, y(t)) \in \Omega$,
iii) pour tout $t \in I$,

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds. \qquad (1)$$

Définition 2, Prolongement : Soient $y_1 : I_1 \to \mathbb{K}^N$ et $y_2 : I_2 \to \mathbb{K}^N$ deux solutions de $(\mathcal{E})$. On dit que y_2 est un prolongement de y_1 si $I_1 \subset I_2$ et si la restriction de y_2 à I_1 est y_1.

Définition 3, Prolongement strict : Soient $y_1 : I_1 \to \mathbb{K}^N$ et $y_2 : I_2 \to \mathbb{K}^N$ deux solutions de $(\mathcal{E})$. On dit y_2 est un prolongement strict de y_1 si y_2 est un prolongement de y_1 avec $I_1 \neq I_2$.

Définition 4, Solution maximale : On dit que y est une solution maximale si elle n'admet pas de prolongements stricts (c'est-à-dire pas d'autres prolongements qu'elle-même).

Exercice 1 (Exemples et contre-exemples de solutions)

Étudier les équations différentielles $y' = 2\,y^{3/2}$ et $y' = 3y^{2/3}$ (s'intéresser en particulier à l'intervalle maximal d'existence).

Exercice 2 (Régularité des solutions)

Montrer que si $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ est de classe C^k, alors toute solution de $(\mathcal{E})$ est de classe C^{k+1}.

Les théorèmes d'existence

Définition 5, Localement lipschitzien par rapport à la seconde variable : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{K}^N$ est dite localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état (notée y ici) si pour tout $(\tilde{t}, \tilde{y}) \in \Omega$, il existe $C_0 = [\tilde{t} - T, \tilde{t} + T] \times \overline{B}(\tilde{y}, r) \subset \Omega$ avec $T, r > 0$ et $k \geq 0$ tels que pour tous $(t, y_1), (t, y_2) \in C_0$,

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|.$$

Théorème de Cauchy-Lipschitz : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$ et $f : \Omega \to \mathbb{K}^N$ continue (dans toutes les variables) et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Alors il existe une solution maximale et une seule $y : I \to \mathbb{K}^N$ de $(\mathcal{E})$ telle que $y(t_0) = y_0$. De plus, l'intervalle I est ouvert.

Théorème de Cauchy-Péano-Arzela : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$ et $f : \Omega \to \mathbb{K}^N$ continue. Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Alors il existe une solution maximale $y : I \to \mathbb{K}^N$ de $(\mathcal{E})$ telle que $y(t_0) = y_0$. De plus, l'intervalle I est ouvert.

Exercice 3 (Cauchy-Lipschitz dans la cas globalement lipschitzien)

On se place dans le cas de $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une application continue telle que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k\|x - y\|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}$$

où $k \in \mathbb{R}$.

1) Soit $y_0 \in \mathbb{R}^N$. Notons E l'espace $C^0([0,T], \mathbb{R}^N)$ muni de la norme

$$\|y\|_E = \sup_{t \in [0,T]} \|y(t)\|.$$

Montrer que l'application Φ qui à tout élément y de E associe la fonction $\Phi(y)$ de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^N$ définie par

$$\Phi(y)(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\, ds$$

est une application continue de E dans lui-même.

2) Soient $y, \tilde{y} \in E$. Démontrez l'inégalité

$$\|\Phi^p(y)(t) - \Phi^p(\tilde{y})(t)\| \leq k^p \frac{t^p}{p!} \|y - \tilde{y}\|_E, \ \forall t \in [0,T].$$

3) En déduire que le problème $(\mathcal{E})$ avec la condition $y(0) = y_0$ admet une unique solution sur $[0,T]$.

Exercice 4 (Cauchy-Lipschitz linéaire)

Nous allons montrer dans cet exercice le théorème :

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A \in C(I, M_N(\mathbb{K}))$, $B \in C(I, \mathbb{K}^N)$. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^N$. Alors il existe une solution et une seule $y : I \to \mathbb{K}^N$ de $(\mathcal{L})$ telle que $y(t_0) = y_0$.

1) Noter les différences avec le cas non linéaire.

2) Montrer l'équivalence avec la formulation intégrale

$$Y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t (A(s)Y(s) + B(s))\, ds.$$

3) On définit sur I les fonctions $Y_0(t) = y_0$ et pour $n \geq 0$,

$$Y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t (A(s)Y_n(s) + B(s))\, ds.$$

a) Si I est un intervalle compact, montrer que l'on a une majoration du type

$$\|Y_n(t) - Y_{n-1}(t)\| \leq C \frac{\alpha^{n-1}|t - t_0|^n}{n!}.$$

En déduire l'existence sur I dans ce cas.

b) Montrer l'unicité.

c) Passer au cas non compact.

Exercice 5 (Cylindres de sécurité et Cauchy-Lipschitz local)

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ continue.

Définition 6, Cylindre de sécurité : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$, $f : \Omega \to \mathbb{K}^N$ continue et $y_0 \in \mathbb{K}^N$. On dit que $C = [t_0 - \alpha_1, t_0 + \alpha_1] \times \overline{B}(y_0, r_1) \subset \Omega$, avec $\alpha_1, r_1 > 0$, est un cylindre de sécurité pour $(\mathcal{E})$ si pour toute fonction $y \in \tilde{E} = C([t_0 - \alpha_1, t_0 + \alpha_1], \overline{B}(y_0, r_1))$, la fonction $\Phi(y)$ à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ définie sur $[t_0 - \alpha_1, t_0 + \alpha_1]$ par

$$\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

est dans $\tilde{E}$.

1) Soient $T_0, r_0 > 0$. Montrer que pour tout $(t_0, y_0) \in \Omega$ et pour tout cylindre $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset \Omega$, il existe un cylindre de sécurité $C = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset C_0$.

2) On suppose que f est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Obtenir $\alpha > 0$ et $r_0 > 0$ afin que pour tout $y \in E = C^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \overline{B}(y_0, r_0))$, $\Phi(y)$ de $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $\Phi(y)(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\, ds$ est dans E.

3) S'inspirer de la preuve de l'exercice précédent pour conclure à l'existence d'une solution sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Exercice 6 (Prolongement pour obtenir le théorème global)

1) Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, montrer que si y et $\tilde{y}$ sont deux solutions de $(\mathcal{E})$ de I dans $\mathbb{R}^N$ qui coïncident en un point de I alors elles coïncident sur tout I.

2) Toujours sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, on pose

$$\mathcal{F} = \{I \text{ intervalle}\,;\, t_0 \in I \text{ et } (\mathcal{E}) \text{ a une solution sur } I \text{ qui vaut } y_0 \text{ en } t_0\}.$$

Pourquoi $\mathcal{F}$ est non vide ? Construire une solution maximale et conclure au théorème de Cauchy-Lipschitz.

Références : Berthelin